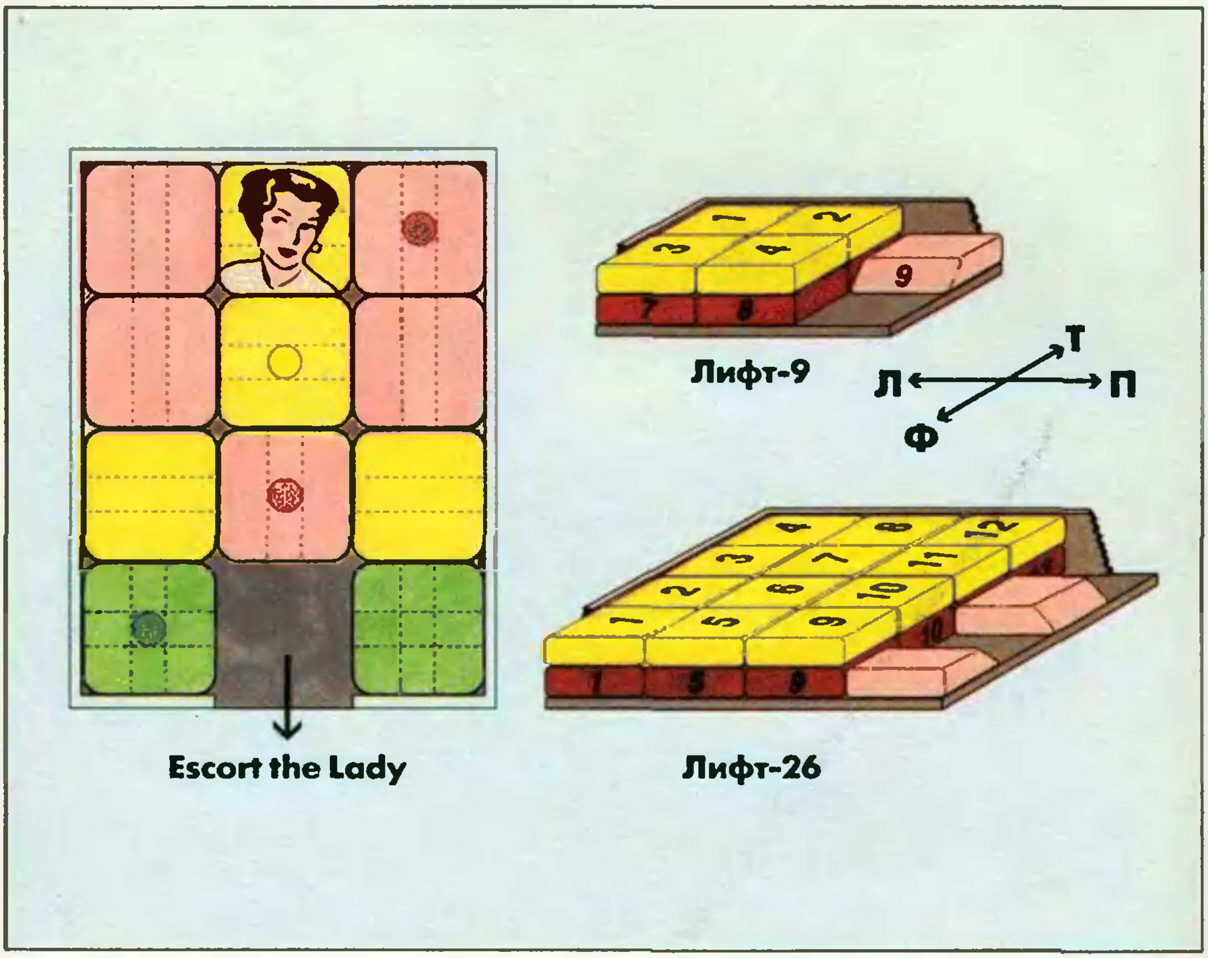
ISSN 0130-2221

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ 1996 · №1

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



СКОЛЬЗЯЩИЕ ПЛАШКИ

Знаменитая игра «15», которой уже более 100 лет, продолжает свою жизнь в головоломках, созданных в наше время. Изобретатели додумались размещать внутри коробочки с фишками препятствия разного рода, которые затрудняют путь к решению головоломки. Сегодня мы рассказываем о игрушках-головоломках, придуманных в Японии и России.

В японской головоломке «Lady» 11 фишек размещены в коробочке 3×4 клетки. В дно коробочки [illegible]ставлены четыре штифта, высотой в половину толщины фишки, которые снаружи не видны. В фишках [illegible] имеются пазы, обозначенные на рисунке пунктиром. Фишку можно перемещать через поле со [illegible]м, *только если у фишки есть паз соответствующего направления. Задача — переместить фишку* [illegible] к выходу из коробочки. Остальные фишки должны вернуться в исходное положение.

[illegible]очалов придумал двухэтажную игру со скользящими плашками. Мы расскажем о двух ее [illegible]вой игре — «Лифт-9» — в коробочке 2×3 в два этажа расположены 9 фишек: 4 желтых, [illegible]а розовая, с фронтальным скосом. Все фишки могут свободно перемещаться по [illegible]ивать со второго этажа на первый. Подниматься на второй этаж фишки могут [illegible]ки 9 при движении от фронта (Ф) к тылу (Т). Требуется за наименьшее число [illegible]тые и коричневые фишки с сохранением порядка их нумерации. Лучшее [illegible]

[illegible]риант игры — «Лифт-26» с двумя фишками-лифтами, по-разному

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ · 1996 · №1

В номере:

10^3 Дж/кг
Новая земля
Ф.К.

Новая Земля и Новое Небо
(страшная фантазия на физические темы)

А. СТАСЕНКО

> *И сказал Сидящий на престоле: се, творю все новое...*
> *И увидел я новое небо и новую землю; ибо прежнее небо и прежняя земля миновали...*
>
> Откровение Св. Иоанна Богослова (Апокалипсис)

Некто, движимый любовью к Человечеству, предложил увеличить площадь поверхности Земли в сто раз, «выкачивая» наружу ее внутренности. Чем не благородный проект: какое кардинальное решение территориальных споров, сколько новых дач, огородов и садовых участков! А сколько еще дополнительных прелестей: путешествия внутри полой оболочки почти без затрат энергии, далекие прыжки в высоту и длину из-за уменьшения силы тяготения на поверхности!

Но всякий новый проект, тем более глобальный, требует количественных оценок затрат и последствий. Приступим.

Прежде всего оценим размеры Новой Земли (радиус R, толщину оболочки δ). Согласно предложению, ее площадь поверхности $S = 4\pi R^2$ должна в сто раз превосходить площадь современной Земли $S_0 = 4\pi R_0^2$, откуда $R^2 = 100R_0^2$, $R = 10R_0$. Значит, внутренний радиус Новой Земли будет $R - \delta$. Далее, из закона сохранения массы найдем

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (R-\delta)^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - R^3 + 3R^2\delta - 3R\delta^2 + \delta^3\right) \approx 4\pi R^2\delta.$$

Первые два слагаемые в скобках взаимно уничтожились, а последними двумя мы пренебрегли, так как они содержат квадрат и куб малой величины — искомой толщины оболочки. Мы пока что предполагаем, что она мала, а затем не забудем это проверить. Мы также предполагаем, что плотность материала Земли однородна по объему и не изменяется в процессе преобразований, поэтому на нее сразу же сократили обе части равенства.

Итак,

$$\frac{\delta}{R} \approx \frac{1}{3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \frac{1}{3000},$$

что действительно можно считать малой величиной. Таким образом, согласно предлагаемому проекту, вся масса Земли должна оказаться внутри очень тонкого слоя (толщиной порядка 20 км), т.е. все элементы этой массы будут почти на одном и том же расстоянии R от ее центра.

Начнем с вычисления работы, которую надо затратить, чтобы «растащить в стороны» (на это расстояние порядка R) всю массу современной Земли.

Поскольку задача сферически симметрична, рассмотрим прежде всего элементарный слой радиусом r и толщиной dr внутри современной Земли (рисунок *а*). Раз уж мы заинтересовались этим слоем, значит, наружные слои уже удалены на требуемое расстояние. А как известно, они не создают никакого поля внутри (кому известно — тот уже молодец, а кто этого не знает, не беда — он может, например, открыть Приложение к журналу «Квант» №4/1995 и заглянуть в статью «Как зависит g от глубины?»). Выделенный нами слой (заштрихованный на рисунке), когда его уже переместят на расстояние r' от центра, будет притягиваться только оставшейся внутренней массой $m(r)$ с силой, которая, согласно закону всемирного тяготения Ньютона, равна

$$-G\frac{m(r)dm(r)}{r'^2}.$$

Чтобы его переместить еще дальше на расстояние dr', нужно совершить работу

$$G\frac{m(r)dm(r)}{r'^2}dr',$$

а на всем пути от r до R эта работа, естественно, будет равна интегралу

$$dA = \int_r^R Gm(r)dm(r)\frac{dr'}{r'^2} = Gm(r)dm(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Здесь уместно обратить внимание на еще одно важное свойство поля тяготения. На рисунке *а* траектория некоторой части элементарного слоя изображена в виде кривой линии со стрелками на ней. Ее можно нарисовать еще кривее, вообще какой угодно — от этого работа по перемещению не изменится, — лишь бы только были неизменными начальное и конечное расстояния от притягивающего центра (в данном случае от внутренней массы $m(r)$). Это важное свойство силового поля тяготения называется потенциальностью.

Все эти рассуждения годятся только для любого элементарного (заштрихованного) слоя. Если теперь снимать с самого начала слой за слоем, нужно найденную работу еще проинтегрировать по r от 0 до R_0:

$$A = \int dA = G\int_0^{R_0} m(r)dm(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Считая современную Землю однородным шаром, т.е. ее плотность ρ_0 одинаковой по всему объему и неизменной в процессе преобразований (а мы ведь так и предполагали еще при вычислении толщины), запишем

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3,\quad dm = 4\pi\rho_0 r^2 dr,$$

так что

$$A = G\frac{4}{3}\pi\rho_0 \cdot 4\pi\rho_0\int_0^R\left(r^4 - \frac{r^5}{R}\right)dr = \frac{GM^2}{R_0}\cdot\frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{6}\frac{R_0}{R}\right),$$

где $M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_0^3$ — полная масса Земли.

Осталось вычислить. Но прежде упростим формулу, связав массу и радиус Земли в единый комплекс, равный ускорению свободного падения g_0:

$$\frac{GM}{R_0^2} = g_0.$$

Тогда

$$A = Mg_0R_0\cdot\frac{3}{5}\left(1 - \frac{5}{6}\frac{R_0}{R}\right).$$

Но может быть, вы не знаете массы

Иллюстрация Д.Крымова

Земли, а под рукой нет справочника? Тоже не беда. Все помнят, чему равны g_0 (9,8 м/с^2) и R_0 (6400 км), и если вы еще вдруг вспомните значение константы G $\left(6{,}6\cdot10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{с}^2\cdot\text{кг})\right)$, то из формулы для g_0 легко найдете массу Земли: $M = 6\cdot10^{24}$ кг. (Когда-то именно так Кавендиш «взвесил» Землю, предварительно определив (первым!) константу G в знаменитом опыте с крутильными весами.)

Итак, все готово для вычислений, и мы находим, что для реализации проекта создания Новой Земли потребуется минимальная работа

$$A \approx 2\cdot10^{32}\ \text{Дж}.$$

Если учесть, что в настоящее время потребление энергии всем человечеством составляет величину порядка 10^{20} Дж/год, легко оценить, сколько лет понадобилось бы для реализации этого «благодетельного» проекта!

Ну хорошо, пусть Новая Земля создана. Но каково жить на ней?

Прежде всего, на ее поверхности ускорение свободного падения будет в $\frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{100}$ раз отличаться от современного значения. Во столько же раз тела станут легче, и во столько же раз дальше полетит камень, брошенный с прежней скоростью под тем же углом к горизонту. Математический маятник будет колебаться в $\sqrt{g_0/g} = 10$ раз медленнее, а внутри Новой Земли вообще не будет колебаться. Космические скорости изменятся в $\frac{\sqrt{gR}}{\sqrt{g_0R_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{R}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx \frac{1}{3}$ раз.

Внутри Новой Земли, как уже сказано, можно путешествовать без затрат энергии, так как там тяготения нет ($g = 0$), следовательно, для перемещения между любыми двумя точками не нужно совершать работы. Или, как сказал бы физик, все пространство внутри шарового слоя является эквипотенциальным: $\varphi = \text{const}$ при $r < R - \delta$. Посмотрите внимательно на рисунки *б* и *в* и сравните графики функций $g(r)$ и $\varphi(r)$, нарисованные для современной Земли и Новой Земли соответственно.

Но интересно знать, какую работу надо совершить, чтобы выбраться изнутри наружу?

Поместим сферическую поверхность радиусом r внутрь этого слоя (см. рис. *а*, где справа показан увеличенный кусок слоя). На этой поверхности, как мы уже знаем, ускорение тяготения создается только той частью массы, которая находится внутри поверхности и равна $\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - (R-\delta)^3\right)\rho_0$, так что

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G\frac{\left(r^3 - (R-\delta)^3\right)\rho_0}{r^2}.$$

Эта функция изображена на рисунке *в* (между точками $r = R - \delta$ и $r = R$).

Чтобы найти работу A_1 по извлечению тела массой 1 кг из полости наружу, надо взять интеграл от $g(r)$ в пределах от $R - \delta$ до R. Сделайте это сами. Мы же оценим A_1, заменив $g(r)$ на этом интервале линейной функцией, изменяющейся от 0 внутри до $g = g_0(R_0/R)^2$ снаружи:

$$A_1 = g_{\text{ср}}\cdot\delta = \frac{g}{2}\delta = \frac{g_0}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\cdot\delta \approx 10^3\ \text{Дж/кг}.$$

Эта работа по-другому называется разностью потенциалов между внутренней и внешней поверхностями. Она обозначена через $\Delta\varphi$ на рисунке *в* (внизу).

Но как дышать на этой планете?

Пусть масса атмосферы осталась тоже неизменной. Оценим ее для современной Земли. Известно, что в предположении постоянства температуры по высоте y (изотермичность атмосферы, $T = \text{const}$) плотность Земли изменяется по закону

$$\rho = \rho(R_0)e^{-\frac{mg_0y}{kT}},$$

где m — масса «молекулы воздуха», k — постоянная Больцмана. Заметим, что в числителе показателя экспоненты стоит фактически разность потенциалов на высоте y и на поверхности Земли (где $y = 0$).

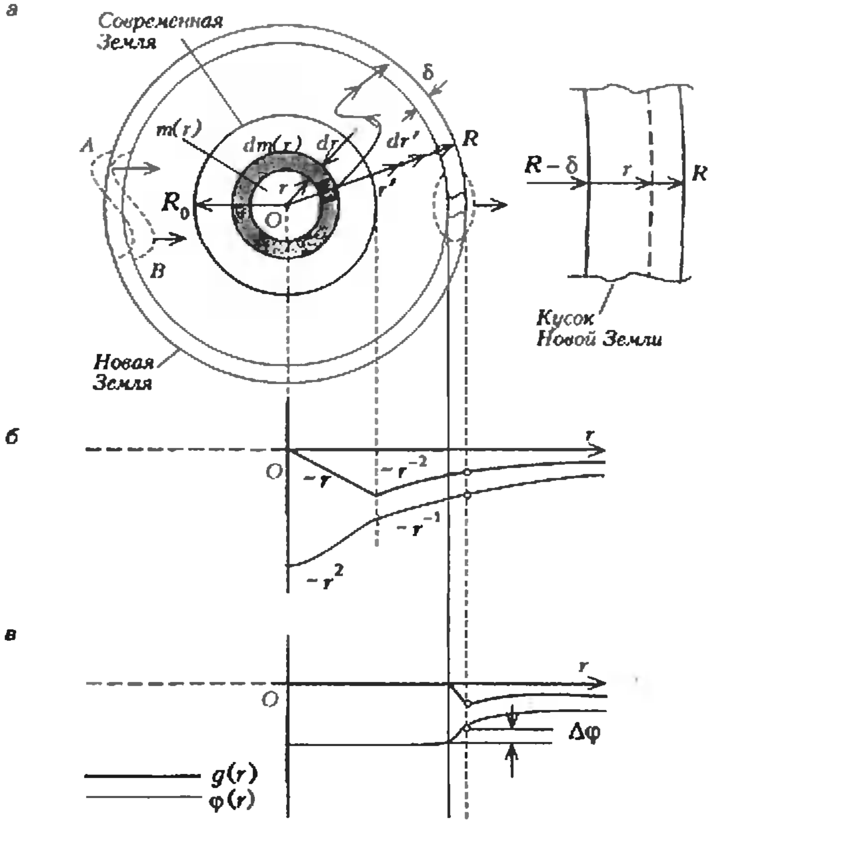
Если положим $\frac{mg_0y_*}{kT} = 1$, то мы найдем ту характерную высоту атмосферы, на которой плотность составляет $1/e$ часть от поверхностной, т.е. приблизительно втрое меньше. Эта высота численно равна

$$y_* = \frac{kT}{mg_0} \approx 8\ \text{км}.$$

Тогда массу атмосферы можно оценить как

$$M_\text{а} \sim 4\pi R_0^2 y_* \rho(R_0) \sim 5\cdot10^{18}\ \text{кг}.$$

На Новой Земле эта атмосфера распределится равномерно внутри шарового слоя (так как там между любыми точками разность потенциалов равна нулю), а над поверхностью она по-



прежнему будет спадать с высотой экспоненциально, только теперь характерная высота ее будет в $g_0/g = 100$ раз больше, т.е. будет составлять 10^3 км, что все еще мало по сравнению с радиусом Новой Земли $R = 10R_0 \approx 6 \cdot 10^4$ км.

Отношение значений плотности внутри и снаружи равно

$$\frac{\rho^-}{\rho^+} = \frac{\rho(R-\delta)}{\rho(R)} = e^{\frac{A_1 m}{kT}},$$

где A_1 — найденная выше удельная работа по перемещению 1 кг массы изнутри наружу. Оценим показатель степени:

$$\frac{A_1 m}{kT} \sim 1{,}2 \cdot 10^{-2}.$$

Поскольку он оказывается малым, можно считать, что значения плотности внутри Новой Земли и на ее поверхности почти одинаковы.

Итак, запишем условие сохранения массы атмосферы:

$$M_a = \frac{4}{3}\pi\rho^-(R-\delta)^3 + 4\pi R^2\rho^+ \cdot 100y_* \approx$$
$$\approx \frac{4}{3}\pi\rho^- R^3\left(1 + 3\frac{100y_*}{R}\right) \approx \frac{4}{3}\pi\rho^- R^3$$

(так как второе слагаемое в скобках много меньше единицы, то можно считать, что почти вся атмосфера собралась внутри), откуда

$$\rho^+ \approx \rho^- \approx \frac{M_a}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3.$$

Пожалуй, трудно будет дышать в такой атмосфере как внутри, так и на поверхности новой планеты.

Кроме того, шаровой слой Новой Земли будет неустойчив: любое возмущение AB (рисунок *а*, слева) его формы будет расти со временем, поскольку нет восстанавливающей силы, так что придется постоянно заботиться о поддержания его целостности.

Но и это еще не все. А с какой угловой скоростью будет вращаться Новая Земля? Есть в механике такой закон — закон сохранения момента импульса[1]. Его легко записать для двух состояний, аналогично закону сохранения импульса $m_0 v_0 = mv$, заменив линейные скорости на угловые, а массы — на так называемые моменты инерции.

Вообще говоря, моменты инерции для однородного шара и сферического слоя известны: $\frac{2}{5}MR_0^2$ и $\frac{2}{3}MR^2$ соответственно. Но нам для оценок коэффициенты в этих выражениях не столь важны. Поэтому запишем (массу сразу сократим)

$$R_0^2\omega_0 \approx R^2\omega,$$

откуда новые сутки будут больше современных в

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \approx \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = 100 \text{ раз}.$$

Таким образом, семидневная «неделя» на Новой Земле будет больше года. Сколько же придется ждать субботы и воскресенья! Это уж никуда не годится. Поэтому нужно с величайшей осторожностью подходить ко всяким глобальным перестройкам, используя, однако, анализ их возможных последствий для углубленного изучения законов физики.

[1] *О моменте импульса можно прочитать в статье В. Сурдина «Тайна «утренней звезды» в «Кванте» № 6 за 1995 г. (Прим. ред.)*

ИНФОРМАЦИЯ

Турнир юных физиков

С 4 по 11 июня 1995 года в спортивном комплексе близ небольшого городка Спала в Польше проходил VIII Международный турнир юных физиков. В турнире приняли участие команды Белоруссии, Венгрии, Германии, Грузии, Нидерландов, Польши, России, Словакии, Узбекистана, Украины, Финляндии, Чехии; причем Германия, Польша и Россия выставили по две команды. Россию представляли команда СУНЦ МГУ, занявшая первое место в Российском турнире юных физиков, и команда г. Новгорода, занявшая там второе место. Как и в прошлом году, участие российских команд в международном конкурсе оказалось возможным благодаря спонсорской поддержке Фонда Дж. Сороса. На турнире в Спала присутствовали также наблюдатели из Израиля, Латвии, Литвы, Словении и Швеции.

Победителем турнира стала сборная команда Германии. Второе место разделили команды Чехии и Венгрии. Третье место было присуждено шести командам — Грузии, Белоруссии, Словакии, Нидерландов, Польши (Легница) и Польши (Варшава). Российские команды, как никогда, показали плохие результаты, заняв 13 и 14 места и обогнав лишь команду Финляндии. В индивидуальном зачете лишь на 7-м месте оказался наш лучший участник — Степашко Александр, единственный одиннадцатиклассник среди десятиклассников обеих российских команд. Такой состав команд, отсутствие преемственности и языковая проблема наших участников (недостаточное владение английским языком) несомненно отрицательно сказались на результатах турнира.

Следующий IX Международный ТЮФ пройдет в Грузии. (На нем тоже будут представлены две лучшие команды, победившие в Российском турнире.) Международный оргкомитет утвердил задачи предстоящего турнира и рекомендовал использовать их для проведения национальных турниров.

К моменту выхода этого номера журнала уже прошел (в декабре 1995 г.) Московский ТЮФ, на котором были использованы первые 8 задач Международного турнира. Российский ТЮФ намечено провести с 10 по 15 марта 1996 г. в г. Новгороде Великом. Заявки на участие в Российском ТЮФ принимаются до 10 февраля 1996 г. Участники турнира будут оплачивать только прямые расходы, включая проживание, питание и, по желанию, культурную программу. Для получения дополнительной информации и присылки заявок сообщаем координаты Оргкомитета ТЮФ.

Адрес: 121357 Москва, Кременчугская ул., д.11, кафедра физики СУНЦ МГУ; *тел*: 445-5306; *факс*: 445-4634; *адрес электронной почты*: lob@school.phys.msu.su

Задачи Российского и Международного ТЮФ-96

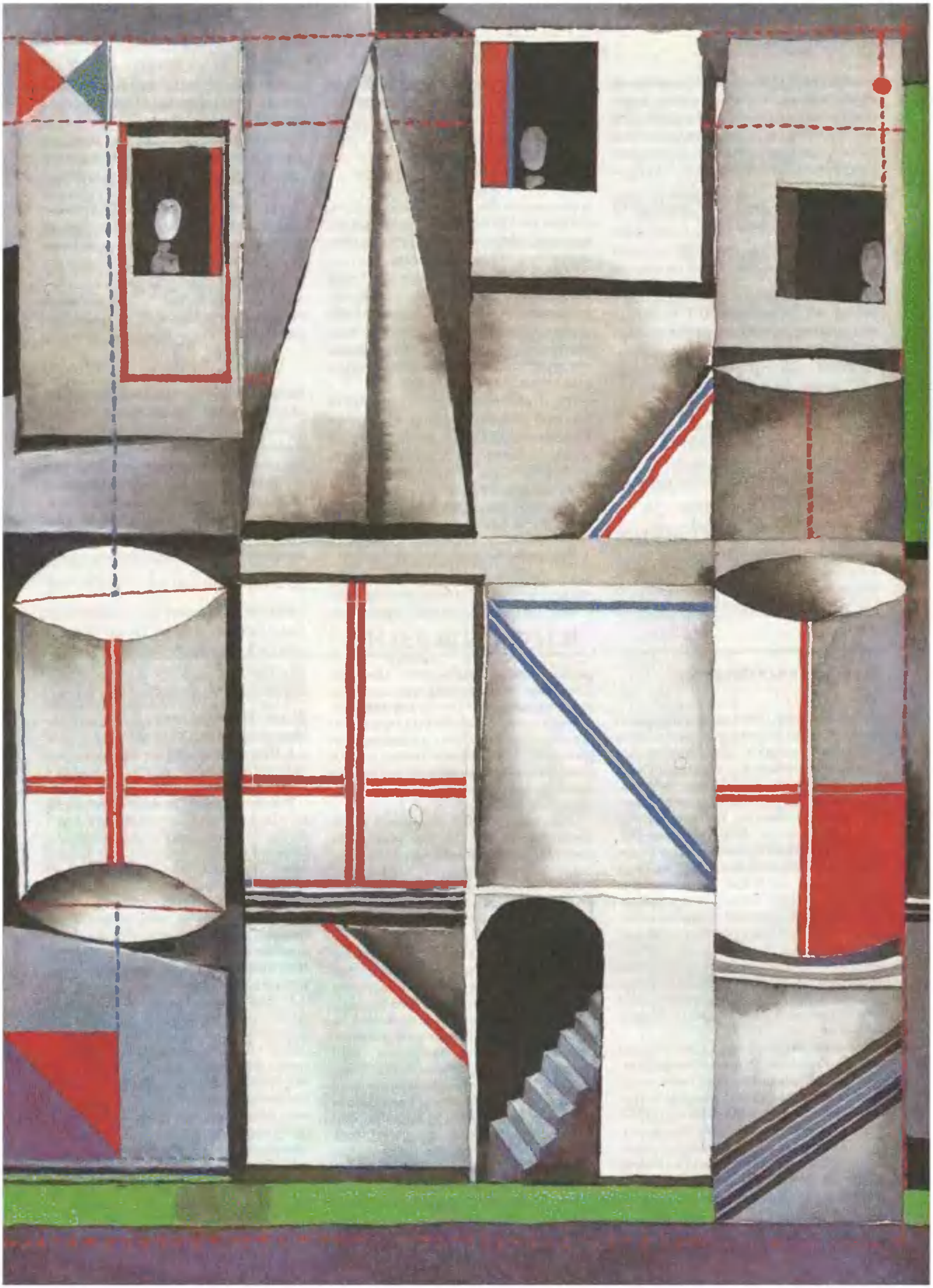
1. Придумай сам. Самостоятельно сформулируйте и решите задачу, связанную с проблемой озоновых дыр.

2. Комок бумаги. Скомкайте произвольно в кулаке лист писчей бумаги (А4). Форму получившегося комка можно приближенно считать шарообразной. Сделав много подобных комков и измерив их средние диаметры, можно построить гистограмму распределения диаметров. Постарайтесь объяснить получившийся результат. Произведите более тонкие исследования зависимости среднего диаметра комка от существенных, по Вашему мнению, параметров.

3. Велогонка. Два очень сильных и «совершенно одинаковых» спортсмена по прогнозам специалистов должны были победить в шоссейной велогонке на 100 км с одинаковым временем. Но, увы, один из них пришел к финишу позже. Как потом выяснилось, к ободу заднего колеса его велосипеда злоумышленники прикрепили гайку массой 5 г. На сколько, по Вашему мнению, отстал пострадавший?

4. Самоформирование кучки. Горизонтальная жесткая пластина колеблется

(Продолжение см. на с. 44)



Динамические игры простого поиска

А. ЧХАРТИШВИЛИ, Е. ШИКИН

Введение

Даже весьма отвлеченные математические задачи часто имеют легко распознаваемые и хорошо прослеживаемые бытовые корни. Питающей средой для этих задач оказываются обстоятельства, зачастую от математики довольно далекие.

Задачи поиска и обнаружения, о которых далее и пойдет речь, составляют один из подобных классов.

Вряд ли стоит подробно говорить о том, какое место занимают в нашей жизни проблемы поиска. Тем более, что указать сколь-нибудь точно, когда именно эти задачи начали привлекать внимание людей, практически невозможно.

Читателю совсем нетрудно представить себе первобытного человека, настороженно перемещающегося по пещере с горящим факелом в руке: ведь ему совершенно необходимо, чтобы будущее жилище было свободно от опасных обитателей — хищных зверей и ядовитых растений, змей и пауков. И потому он обязан, если они оказались здесь раньше, обнаружить их и, найдя, уничтожить.

Впрочем, можно рассмотреть и в известном смысле более цивилизованное обращение этой пещерной ситуации — динамическую игру «Принцесса и чудовище», в которой чудовище вслепую ищет принцессу в темном помещении. Помещение имеет произвольную форму, которая, однако, известна обоим участникам игры (может быть, из-за маленьких пропускающих свет отверстий высоко в стенах). Чудовище, которое предполагается в высокой степени интеллектуальным, движется с известной скоростью, причем так, что направление движения может меняться мгновенно. Принцессе разрешена полная свобода перемещения. Поимка происходит, если расстояние между принцессой и чудовищем становится меньше заданной величины.

А вот еще одна задача. Представим себе старинный замок, построенный в живописном лесу. Чтобы враги не смогли тайком подобраться к замку, вокруг него на некотором расстоянии по распоряжению его владельца, богатого и знатного герцога, проложена охранная тропа, которую должны патрулировать верхом верные рыцари (рис. 1). Герцогу нужно решить: сколько рыцарей необходимо выделить в патрульный отряд с тем, чтобы вражеский лазутчик не смог пересечь тропу незамеченным. Несколько позже мы сможем дать ответ на этот вопрос.

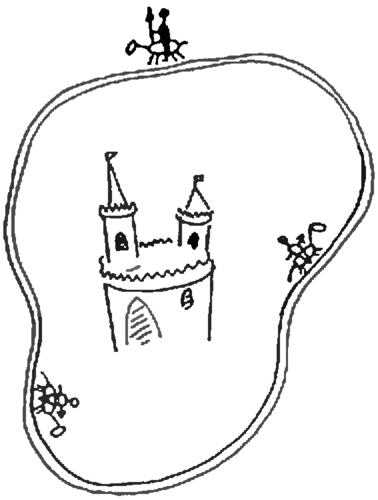


Рис. 1

Объекты, участвующие в поисковой задаче, преследуют разные цели: одни ищут, другие либо прячутся, либо стремятся уклониться. Мы будем рассматривать задачи, в которых поиск ведет один объект — ищущий, количество же искомых объектов может быть, вообще говоря, любым. В зависимости от того, как ведут себя эти искомые объекты, различаются задачи поиска неподвижных объектов и задачи поиска объектов, изменяющих свое местоположение. В последнем случае наибольший интерес представляют задачи, в которых искомые объекты стремятся избежать обнаружения активно и потому строят свою стратегию с учетом получаемых сведений о перемещении ищущего объекта.

Поисковые множества, т.е. множества, на которых проводится поиск, могут иметь самую разную структуру. Одним из простейших поисковых множеств является бесконечный круглый цилиндр, на котором и будут происходить в дальнейшем основные события.

Предлагаемый геометрический подход к решению задач поиска основан на использовании вспомогательных множеств, форма и расположение которых изменяется во времени. Описание природы их возникновения и вычленения полезных свойств удобно начать со случая, когда объекты перемещаются по плоскости.

Постановка задачи простого поиска на плоскости

Рассмотрим на плоскости два точечных объекта A и B, способных перемещаться по ней с постоянными скоростями α и β соответственно ($\alpha > \beta$) и в остальном обладающих полной свободой поведения. Будем считать, что объект *B обнаружен* объектом A, если в некоторый момент времени расстояние между этими объектами оказывается не больше заданного положительного числа l. Назовем объект A *ищущим*, а объект B — *уклоняющимся*.

Информированность объектов. Будем считать, что поисковое множество и параметры α, β и l известны обоим объектам. Уклоняющемуся объекту B кроме того заранее известна траектория ищущего объекта A и положение последнего на ней в каждый момент времени. Ищущему объекту A, напротив, о местоположении объекта B ничего не известно до самого момента возможной поимки.

Движение объекта с постоянной скалярной скоростью принято называть *простым движением*[1].

Ищущий объект A как бы несет на себе круг радиусом l, постоянно нахо-

[1] *См., например, книжку Л.А. Петросяна и Г.В. Томского «Через игры к творчеству», изданную в Новосибирске в 1991 году (издательство «Наука»).*

лясь в его центре (рис.2). Попадание уклоняющегося объекта B в этот *l-круг обнаружения* означает для

Рис. 2

ищущего объекта A успешное завершение поиска (*обнаружение*). Ясно, что объект A стремится обнаружить объект B, который, в свою очередь, стремится обнаружения избежать.

Запретные множества. Пока объект A стоит на месте, запретным для объекта B множеством является l-круг обнаружения. Стоит, однако, объекту A начать движение (со скоростью α), как запретное для объекта B множество сразу же начнет увеличиваться в размерах. Покажем, как это будет происходить.

Пусть объект A движется по прямой L. Тогда в каждый момент времени вблизи прямой L по направлению движения объекта A возникает множество, в котором объект B находиться не должен под угрозой неизбежного обнаружения при последующем поступательном перемещении объекта A вдоль этой прямой. Проведем соответствующие построения, считая для определенности, что началу движения объекта A отвечает момент времени $t_0 = 0$. Возьмем некоторое число t, подчиненное условию $0 < t < l/\beta$, и построим круг радиусом $l - \beta t$ с центром A_t на прямой L, отстоящим от начального положения A_0 на расстояние αt по направлению движения объекта A (рис.3). Нетрудно видеть, что если объект B находится в этом круге, то через время, равное t (когда

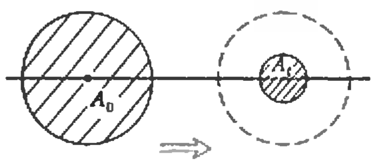


Рис. 3

объект A переместится из точки A_0 в точку A_t), он окажется в l-круге обнаружения.

Предложенное рассуждение справедливо для любого t от 0 до l/β. Поэтому каждый из получающих при этом кругов (они как бы выстроены вдоль прямой L по убыванию радиусов в сторону движения объекта A) является запретным для объекта B. Запретным является и их объединение, представляющее собой часть плоскости, заключенную между дугой окружности ω с радиусом l и двумя отрезками касательных к этой окружности, проведенных из точки на прямой L, которая удалена от центра окружности на расстояние $\alpha l/\beta$ (рис.4).

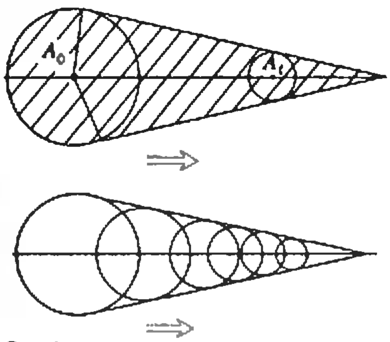


Рис. 4

Назовем это объединение *упреждающей областью*. Угол λ, который образуют с прямой L радиусы, проведенные из центра окружности ω в точки касания, определяется из соотношения

$$\cos\lambda = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Задача. Покажите, что если объект B в данный момент времени находится вне упреждающей области, то, двигаясь под углом λ к траектории L объекта A, или, что то же самое, перпендикулярно прямолинейному участку границы упреждающей области, он сможет избежать обнаружения (рис.5).

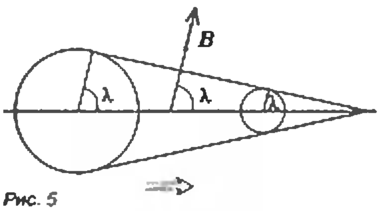


Рис. 5

Существует еще одно множество, в котором объект B не может находиться. Это область, куда объект B не успевает попасть на данный момент времени после ухода ищущего объекта A вместе с l-кругом обнаружения. Ее структура вполне аналогична структуре упреждающей области: как и упреждающая область, она является объединением кругов с центрами на траектории объекта A и равномерно убывающими радиусами (считая от радиуса l-круга обнаружения). Назовем это множество *остаточной областью*. Отметим, что остаточная область приобретает вид, изображенный на рисунке 6, через промежуток времени, равный l/β, после начала движения объекта A.

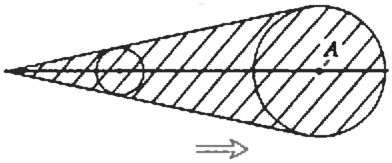


Рис. 6

Объединение остаточной и упреждающей областей назовем *следящей областью* (рис.7).

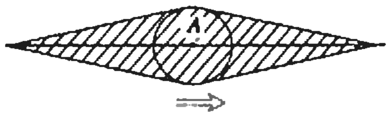


Рис. 7

Свойства следящей области (траектория ищущего объекта A — прямая):

1) длина отрезка, высекаемого на траектории следящей областью, равна

$$l_0 = 2l\frac{\alpha}{\beta},$$

2) форма следящей области не зависит ни от направления движения объекта A, ни от рассматриваемого момента времени $t > l/\beta$,

3) прямая L — ось симметрии, а центр A l-круга обнаружения — центр симметрии следящей области.

Вернемся к задаче о патрулировании рыцарями охранной тропы.

Будем считать, что скорости перемещения рыцарей одинаковы и равны α, а максимальная скорость пытающегося пробраться к замку злоумышленника (для этого ему достаточно пересечь тропу) равна β, причем $\beta < \alpha$. Будем также считать, что каждый рыцарь способен опознать наличие лазутчика, если последний оказывается на расстоянии l от него.

Когда рыцари скачут по тропе, с каждым из них связана переменная следящая область, определяемая числами α, β, l и траекторией — охранной тропой, длина которой равна L. Следящая область высекает из траек-

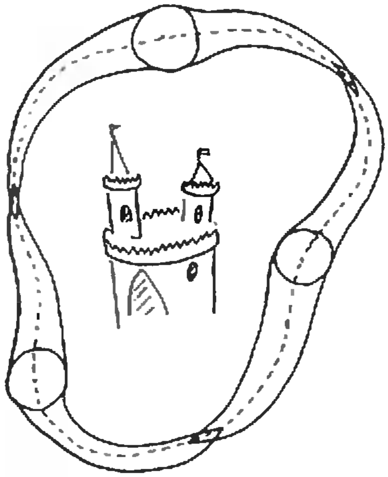


Рис. 8

тории движения отрезок длиной L_0. Поэтому для охраны замка от неприятельского лазутчика необходимо такое число N рыцарей, которое удовлетворяет условию

$$2Nl\frac{\alpha}{\beta} \geq L$$

(см. рис.8, где $N = 3$).

Поиск на поверхности бесконечного цилиндра

Под *бесконечным цилиндром* мы будем понимать множество точек пространства, равноудаленных от данной прямой – *оси цилиндра*. Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его по направляющей окружности. Радиус этой окружности не зависит от выбора секущей плоскости и называется радиусом цилиндра. Плоскость, содержащая ось цилиндра, пересекает его по двум прямым – *прямолинейным образующим* цилиндра.

Пусть C – бесконечный цилиндр радиусом r. Возьмем на плоскости бесконечную полосу П (часть плоскости, ограниченную двумя параллельными прямыми) шириной $2\pi r$. Ясно, что полосу П можно наложить на цилиндр C так, чтобы определяющие ее параллельные прямые совпали одна с другой и с прямолинейной образующей цилиндра. Обратно, разрезав цилиндр C вдоль прямолинейной образующей и затем развернув его на плоскость, мы получим полосу шириной $2\pi r$ (рис.9).

Механическая интерпретация. Предположим, что цилиндр, одна из прямолинейных образующих и одна из направляющих окружностей которого закрашены несохнущей краской, катится по плоскости без проскальзывания прямолинейно и равномерно. После каждого полного оборота цилиндра вокруг оси выделенная прямолинейная образующая будет оставлять на плоскости след в виде прямой; при этом расстояние между соседними прямыми будет равно длине $2\pi r$ направ-

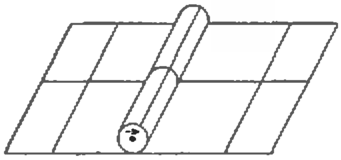


Рис. 10

ляющей окружности. След отмеченной направляющей окружности также будет прямолинейным (рис.10).

Проделывая обратную процедуру, можно скатать плоскость в цилиндр (рис.11). Полезно проследить за тем,

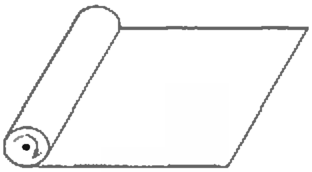


Рис. 11

во что при этом перейдут прямые на плоскости.

В зависимости от угла с направлением скатывания эти прямые можно разбить на три класса:

1) прямые, параллельные направлению скатывания (каждая из них наматывается на некоторую направляющую окружность цилиндра (рис.12)),

2) прямые, перпендикулярные направлению скатывания (каждая из них переходит в прямолинейную образующую цилиндра (рис.13)),

3) прямые, образующие с направлением скатывания острые углы (каждая из них переходит в кривую на цилиндре, называемую *винтовой линией* (рис.14)).

Рис. 14

Интересно разобраться в том, как будет выглядеть винтовая линия на плоской развертке цилиндра.

Пусть Г – винтовая линия на цилиндре C. Разрежем цилиндр по прямолинейной образующей и развернем на плоскость. На полученной в результате развертке винтовая линия будет выглядеть так, как показано на рисунке 15.

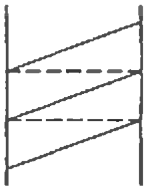


Рис. 15

Направляющие окружности, прямолинейные образующие и винтовые линии на бесконечном цилиндре представляют собой аналог прямых на плоскости. Как и прямые, они обладают свойством быть кратчайшими между любыми двумя своими точками. Правда, в данном случае эти точки должны быть достаточно близкими. Линии с такими свойствами принято называть *геодезическими*.

Выпустим из произвольной точки цилиндра C всевозможные геодезические и отложим на них от этой точки отрезки длинами $l < \pi r$. Объединение всех полученных таким образом отрезков называется *геодезическим кругом радиусом* l (рис.16).

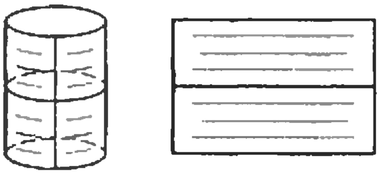


Рис. 9

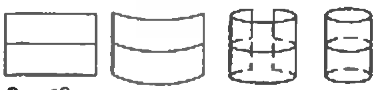


Рис. 12

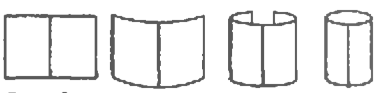


Рис. 13

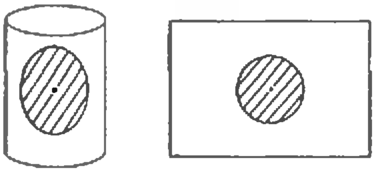


Рис. 16

Формулировка задачи поиска для цилиндра мало чем отличается от формулировки плоской поисковой задачи. Два точечных объекта — ищущий A и уклоняющийся B — перемещаются по цилиндру C радиусом r с постоянными скалярными скоростями α и β соответственно, $\alpha > \beta$. Объект B считается обнаруженным, если в некоторый момент времени он попадает в геодезический круг радиусом l с центром в точке A.

Предположим, что в начальный момент времени объект B расположен на цилиндре C достаточно далеко от объекта A, причем последнему известно, в какой половине цилиндра объект B находится.

Покажем, что при определенных условиях на параметры задачи существует винтовая линия, при перемещении по которой ищущий объект A непременно обнаружит уклоняющийся объект B.

Нетрудно видеть, что при движении объекта A по винтовой линии на цилиндре также возникает следящая область, рассматриваемая здесь как объединение геодезических кругов. При развертке цилиндра на плоскость винтовая линия переходит в прямую, геодезический круг — в обычный круг, а следящей области на плоской развертке будет соответствовать обычная следящая область (рис. 17).

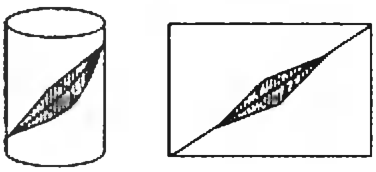


Рис. 17

Исследуем, как будет меняться ситуация в зависимости от выбора угла наклона и траектории перемещения объекта A и направляющей окружности при условии, что параметры задачи связаны неравенством

$$\alpha l < \pi r \beta .$$

Пусть сначала объект A перемещается по направляющей окружности цилиндра. Тогда следящая область будет содержать запретный для объекта B цилиндрический пояс ненулевой ширины (рис. 18,*а*). При движении объекта A по винтовой линии с небольшим углом наклона запретная область будет по-прежнему охватывать цилиндр, а упреждающая и остаточная области будут налегать одна на другую (рис. 18,*б*). Так будет до тех пор, пока упреждающая и остаточная области не коснутся (это касание обеспечивается 3-м свойством следящей области для прямой на плоскости). Легко вычислить (см. рис. 18,*а*), что касание произойдет в тот момент, когда угол наклона винтовой линии к направляющей окружности станет равным

$$\nu_0 = \lambda - \mu ,$$

где

$$\mu = \arccos \frac{l}{2r} .$$

При дальнейшем увеличении угла ν_0

а

б

в

г

д

е

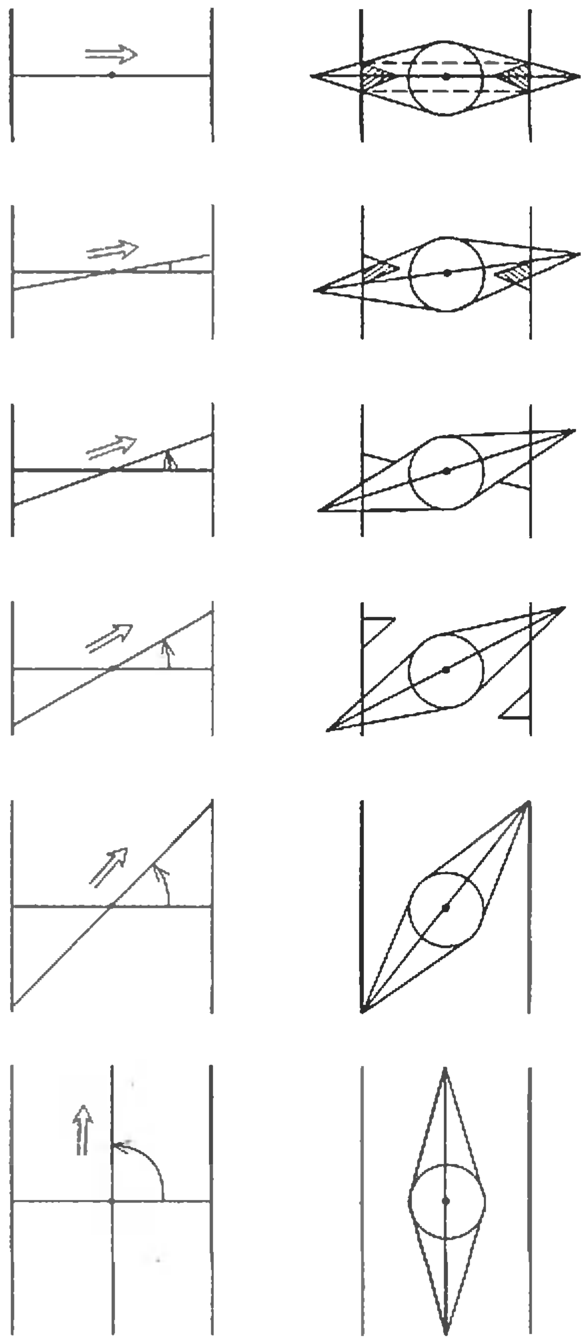


Рис. 18

ситуация резко изменяется — следящая область уже не будет содержать запретного цилиндрического пояса (рис.18,*г* и *д*). На рисунке 18,*е* объект *A* движется по прямолинейной образующей цилиндра.

При движении объекта *A* по геодезической на цилиндре следящая область (как и в случае движения с постоянной скоростью по прямой на плоскости) своей формы не изменяет. Поэтому, двигаясь по винтовой линии Γ_0 под углом ν_0 к направляющей окружности, объект *A* не позволяет объекту *B* проскочить на другую половину цилиндра и в случае, когда проекция скорости объекта *A* на ось цилиндра *C* превышает скорость объекта *B*,

$$\alpha \sin \nu_0 > \beta,$$

догоняет объект *B*.

Последнее неравенство легко преобразуется к следующему виду:

$$2\lambda > \mu + \frac{\pi}{2},$$

или

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\pi r + l) > \beta^2(\pi r - l) > 0. \quad (*)$$

Таким образом, при условии $(*)$ обнаружение возможно и реализуется при перемещении объекта *A* по винтовой линии Γ_0, пересекающей направляющую окружность цилиндра под углом ν_0.

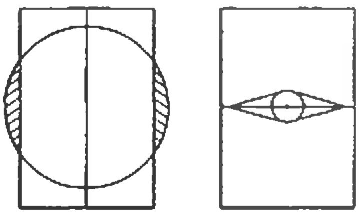


Рис. 19

Замечание. При условии $l \geq \pi r$ объект *A* может просто двигаться по прямолинейной образующей, догоняя объект *B* за счет преимущества в скорости. В случае $\alpha l < \pi r \beta$ успешный поиск практически невозможен (рис.19).

Две задачи обнаружения на бесконечном цилиндре

Привлечение к исследованию задач поиска следящих областей позволяет не только указать содержательные достаточные условия на параметры этих задач, при выполнении которых успешный поиск (обнаружение) возможен, но и предъявить соответствующие траектории перемещения.

А. *Неограниченный случай.* Выше было показано, что при выполнении условия $(*)$ объект *B*, перемещающийся с постоянной скалярной скоростью β, может быть обнаружен на бесконечном цилиндре *C* с радиусом *r* ищущим объектом *A*, перемещающимся с постоянной скалярной скоростью α, если известно, в какой половине цилиндра уклоняющийся объект находится. На самом деле при выполнении условия $(*)$ объект *B* может быть обнаружен и при отсутствии такой информации. Покажем это.

В соответствии с отпущенными ему ресурсами ищущий объект выбирает в начальный момент времени в качестве траектории перемещения винтовую линию Γ_0, пересекающую направляющую окружность под углом

$$\nu_0 = \lambda - \mu,$$

где λ и μ — острые углы, определяемые из соотношений

$$\cos\lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \cos\mu = \frac{l}{\pi r}.$$

Вне зависимости от направления движения ищущего объекта *A* по этой винтовой линии, вертикальная составляющая его скорости (для определенности считаем, что цилиндр *C* расположен так, как показано на рисунке 20) постоянна и равна

$$\alpha' = \alpha \sin \nu_0.$$

Ясно, что уклоняющемуся выгоднее всего перемещаться по прямолинейной образующей цилиндра. Поэтому для обоснования высказанного утверждения удобно рассматривать движение объектов в проекции на ось цилиндра.

Предположим, что объекты *A'* и *B* перемещаются по (вертикальной) прямой с постоянными скалярными скоростями α' и β соответственно, $\beta < \alpha'$. Опишем стратегию объекта *A'*, обеспечивающую его сближение с объектом *B* на заданное расстояние *l*. Выпустим из точки начального местоположения объекта *A'* вверх и вниз от нее два вспомогательных фиктивных объекта M_+ и M_- со скоростями

$$\frac{\alpha' + \beta}{2}$$

(рис.21). Объект *A'* начинает двигаться по прямой вверх и, догнав объект M_+ (в силу разницы в скоростях), тут же изменяет свое направление на противоположное и движется вниз. Догнав объект M_-, вновь меняет направление движения на противоположное и устремляется за объектом M_+ и т.д. Ясно, что, поступая описанным образом, объект *A'* непременно сблизится с объектом *B* на расстояние *l*.

Нетрудно заметить, что описанному перемещению объекта *A'* по оси цилиндра соответствует перемещение объекта *A* по выбранной винтовой линии Γ_0.

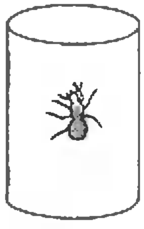


Рис. 20

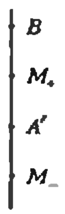


Рис. 21

Б. *Ограниченный случай.* Предположим, что в начальный момент времени ищущему объекту *A* известно, что уклоняющийся объект *B* находится в одной из точек пояса *G*, заключенного между двумя направляющими окружностями (рис.22). Если при этом ищущий объект находится на достаточно большом расстоянии от пояса неопределенности *G*, то ширина последнего с течением времени растет (со скоростью 2β).

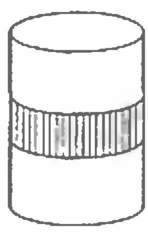


Рис. 22

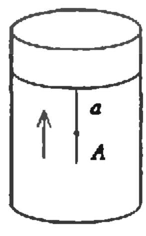


Рис. 23

Считая, что параметры задачи связаны соотношением $(*)$, опишем траекторию, при перемещении по которой ищущий объект *A* непременно обнаружит уклоняющийся объект *B*.

Возможны три случая. В начальный момент $t_0 = 0$ круг обнаружения с центром *A*:

1) лежит вне пояса *G*,

2) целиком принадлежит поясу G,

3) принадлежит поясу G частично.

В первых двух случаях поисковая траектория строится по одному правилу. Сначала объект A перемещается по прямолинейной образующей цилиндра C в сторону ближайшей переменной граничной окружности пояса неопределенности до момента, когда расстояние между объектом A и этой окружностью не станет равным $a = l\sin\mu$ (рис.23). В этот момент объект A принимает решение изменить прямолинейную траекторию на винтовую линию Γ_0 (см. рис.24,*а*, на котором изображено положение упреждающей области и граничной окружности именно в этот момент), по которой он и движется до «симметричного» момента (см. рис.24,*б*, на котором изображено положение остаточной области и второй граничной окружности в момент окончания игры поиска).

в *б*

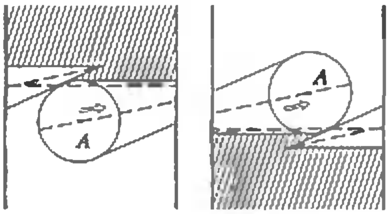


Рис. 24

Третий случай проще всего свести к любому из первых двух (вследствие того, что нашей задачей является отыскание лишь достаточных условий успешного поиска).

Задачи прочесывания, патрулирования и сдерживания

При перемещении объектов A и B по бесконечному цилиндру параметры α, β, l и r могут и не быть связаны условием (∗) или, тем более, условием $l \ge \pi r$. И хотя запретное для объекта B переменное множество все равно возникает, его уже нельзя использовать для решения задачи обнаружения. Однако существуют другие интересные задачи с содержательной постановкой, доступные для успешного разрешения и при более слабых связях между параметрами. Сформулируем некоторые из этих задач и укажем условия на параметры, при которых их можно решить.

А. *Прочесывание.* При условии

$$l < \pi r, \quad \beta < \alpha, \quad \cos\lambda \ge \sin(\lambda - \mu)$$

объект A, перемещаясь по винтовой линии Γ_0, пересекающей направляющие окружности цилиндра C под углом $\nu_0 = \lambda - \mu$, постоянно охватывает цилиндр соответствующей следящей областью. Однако в данном случае вертикальная составляющая его скорости не превосходит скорости объекта B, и он может лишь вытеснять объект B, да и то в случае, если ему известно, в какой половине цилиндра C этот объект находится. На рисунке 25 дана развертка цилиндра для этого случая (прямолинейная образующая, по которой проведен разрез цилиндра, проходит через центр круга обнаружения).

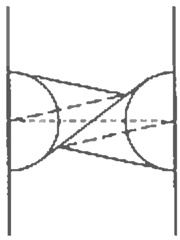


Рис. 25

При условии

$$l \ge \pi r, \quad \beta \ge \alpha$$

объект A перекрывает горловину цилиндра C и также может вытеснять объект B, двигаясь по прямолинейной образующей цилиндра, но лишь в том случае, если ему известно, в какой половине цилиндра этот объект находится.

Б. *Патрулирование.* При условии

$$\frac{l}{\pi r} = \frac{\beta}{\alpha} < 1$$

траектория перемещения объекта A — направляющая окружность цилиндра C; вершины упреждающей и остаточной областей совпадают и, патрулируя, объект A перекрывает для объекта горловину цилиндра C (рис.26).

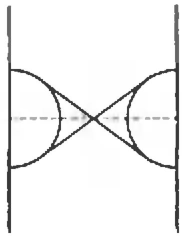


Рис. 26

В. *Сдерживание.* При условиях

$$\frac{l}{\pi r} < \frac{\beta}{\alpha} \le 1$$

объект A не может помешать перемещению объекта B по цилиндру C. Однако, двигаясь по винтовой линии, пересекающей направляющие окружности цилиндра под углом $\mu - \lambda$ впереди объекта B, объект A будет сдерживать это движение (рис.27).

Г. При условии

$$l < \pi r, \quad \beta > \alpha$$

ресурсов объекта A недостаточно даже для сдерживания перемещения объекта B.

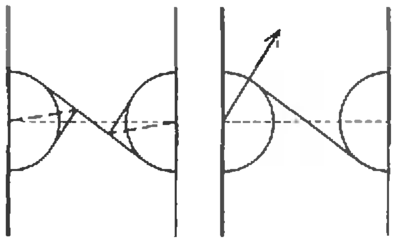


Рис. 27

Таким образом видно, что по мере перехода от задачи обнаружения к задачам вытеснения (прочесывания), патрулирования и сдерживания требования на параметры α, β, l и r постепенно ослабевают.

Общее замечание. То, что решения новых задач оказались простыми (выше не только сформулированы сами задачи, но указаны условия на параметры, обеспечивающие их разрешение, и описаны соответствующие стратегии объектов), объясняется тем, что их рассмотрению предшествовал детальный анализ более трудной задачи обнаружения, результатами которого мы и воспользовались.

Чуть-чуть физики для настоящего охотника

К. БОГДАНОВ, А. ЧЕРНОУЦАН

Введение. Знакомство с дробовой башней

Один из авторов, находясь как-то в служебной командировке в Балтиморе (США), обратил внимание на высокую заводскую трубу, находящуюся почти в центре этого города. Удивляло то, что никаких зданий рядом не было. Что же это за труба без завода?

Автор много раз проезжал мимо загадочной трубы, но никогда не видел и следов дыма над ней. Ответ на вопрос был позднее обнаружен на табличке, прикрепленной к трубе: «ДРОБОВАЯ БАШНЯ. Воздвигнута в 1828 г. Использовалась для изготовления дроби. Расплавленный свинец, пропущенный через сито на верху башни, падал в емкость с водой, установленную в ее основании. Высота — 234 фута и 3 дюйма. Диаметр у основания — 40 футов, вверху — 20 футов...».

Так как не все из читателей заядлые охотники, сделаем маленькое охотничье отступление с дробовым уклоном. Охотничья дробь — это маленькие металлические шарики (иногда кубики), входящие в состав патрона для стрельбы из охотничьего гладкоствольного ружья. Дробь изготовляют из свинца с добавкой небольших количеств сурьмы и мышьяка, чтобы сделать ее более твердой. Такая дробь меньше деформируется при выстреле.

Балтиморская дробовая башня

Хорошая дробь должна состоять из дробинок правильной шарообразной формы одинакового диаметра с гладкой блестящей поверхностью. В настоящее время дробь изготовляют методом штамповки. Для предотвращения окисления свинца и уменьшения свинцевания (загрязнения свинцом) стволов дробинки часто покрывают медью, хромом или никелем.

Ну, и наконец о размерах дроби. В России дробь обозначают номерами: от №12 (самая мелкая, с диаметром 1,25 мм) до №0 (с диаметром 5 мм). При этом разность диаметров двух соседних номеров дроби — 0,25 мм. Дробь с диаметром более 5 мм называют картечью. Настоящие охотники знают, что при стрельбе с нормальной дистанции (35 — 40 м) для охоты на волков и лисиц надо использовать дробь №0—2 (около 4 мм), а на рябчика — № 6 — 8 (около 2,5 мм).

В табличке на дробовой башне в Балтиморе не объяснялось, зачем нужна такая высокая башня. Нетрудно, однако, догадаться, что башня должна быть *высокой*, чтобы дробинки были *круглые*.

Действительно, всем известно, что летящая в вакууме капля воды принимает округлую (шарообразную) форму. Происходит это из-за того, что капля во время полета находится в состоянии невесомости, и силы поверхностного натяжения, пытаясь минимизировать ее поверхность, делают ее шарообразной (с учетом сопротивления воздуха — почти шарообразной). Очевидно, что такие же рассуждения можно применить и к падающей капле расплавленного свинца. А если учесть, что поверхно-стное натяжение расплавленного свинца составляет более 400 мН/м, а воды лишь 70 мН/м, то эти рассуждения даже в большей степени применимы к расплавленному свинцу, чем к воде.

Итак, высокая башня нужна для того, чтобы капли свинца, летя в свободном падении, принимали шарообразную форму. Но если они упадут в контейнер с водой, находящийся в основании башни, до того, как свинец затвердеет, то удар о поверхность воды, очевидно, деформирует каплю и дробинка не будет шарообразной. Таким образом, дробовая башня должна быть такой высоты, чтобы за время падения свинец капли перешел из жидкого в твердое состояние и капли свинца ударялись о поверхность воды уже затвердевшими. Можно ли оценить высоту дробовой башни, необходимой для выплавки дроби определенного размера?

По-видимому, изготовители первых башен (а их немало разбросано по всему свету, есть они и в России) качественно представляли эти физические процессы и понимали, почему башня должна быть высокой. Но конечно же, уровень знаний того времени не позволял сделать не только точные расчеты (это и сейчас трудно), но и надежные оценки необходимой высоты. В то же время, строить башню «с запасом» было бы слишком дорого. Надо полагать, необходимая высота определялась экспериментально. Например, можно представить, что по мере возведения башни периодически проводились пробные плавки свинца, пока наконец не получалась хорошая дробь нужного диаметра. А может быть, проектировщики использовали для экспериментов уже имевшиеся башни (например, регулярно посещали город Пизу)?

У нас совсем другая задача. Не рискуя капиталом и не обещая ничего построить, мы можем смело заняться физическими оценками.

Физика изготовления дроби. Качественное описание

Для начала опишем процесс изготовления дроби качественно (почти без формул), представим происходящие при этом физические процессы, сфор-


Сколько много охотников
до ангела

мулируем основные вопросы и заодно выясним, в каких справочных данных мы нуждаемся для вычислений.

1) Сначала свинец надо поднять на самый верх дробовой башни, нагреть до температуры плавления $T_{пл}$ и расплавить. Затем свинец, нагретый до температуры $T > T_{пл}$, наливают в сито с одинаковыми отверстиями (свинец надо «перегреть», чтобы он успел весь проскочить через сито и сформировать капли-шарики до начала затвердения). Можно попытаться оценить диаметр ячеек сита d_c, который обеспечивает образование капель свинца нужного радиуса r. Для этого надо знать плотность свинца $\rho_{св}$ и коэффициент поверхностного натяжения расплавленного свинца $\sigma_{сн}(T)$ при температуре T. Дело в том, что в момент отрыва капли сила поверхностного натяжения $\sigma_{сн} \cdot \pi d_c$ уравновешивает силу тяжести капли. Так как к высоте башни этот вопрос отношения не имеет, дальнейшие расчеты диаметра ячеек мы оставляем читателю.

Замечание. Мы не знаем, до какой температуры T перегревают свинец. Ясно, что излишний перегрев нежелателен. Чем выше T, тем большее расстояние пролетит капля до начала отвердения, т.е. выше должна быть башня, не говоря уж о лишних затратах топлива. Кроме того, как мы увидим ниже, при большом перегреве

Иллюстрация Л. Тишкова

Исторический музей «Дробовая башня»

капля начнет деформироваться силой сопротивления воздуха.

2) Чтобы полностью затвердеть, капля массой m должна за время падения отдать количество теплоты, равное

$$Q = Q_1 + Q_2 = c_{св} m(T - T_{пл}) + \lambda m, \quad (1)$$

где $c_{св}$ — удельная теплоемкость жидкого свинца, λ — удельная теплота плавления свинца. Отметим, что, исходя из этой формулы, мы скорее всего несколько завысим необходимую высоту дробовой башни. Можно предположить, что если заметная часть свинца (например, половина) затвердеет, то удар о воду не приведет к деформации образовавшейся толстой «скорлупы», и оставшийся внутри жидкий свинец может затвердеть потом. Однако, не имея возможности оценить необходимую толщину «скорлупы», будем все же исходить из формулы (1).

3) Чтобы понять, какое расстояние должна пролететь капля, чтобы потерять количество теплоты Q, надо описать процесс отдачи тепла окружающему воздуху. Это — самое трудное, так как процессы, происходящие вокруг падающей капли, весьма сложны (турбулентность, конвекция и т.д.). Здесь нам придется ограничиться качественными, весьма приближенными оценками в рамках достаточно простой модели. Эта модель должна выделить главный механизм теплоотдачи и описать, сколько тепла уносит движущийся относительно капли воздух. Нам понадобятся: плотность воздуха $\rho_в$, температура окружающего воздуха $T_в$ (примем ее равной 20°C), удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении c_p и его теплопроводность .

4) И последнее. Интенсивность обмена теплом между каплей и воздухом зависит от скорости капли. Чтобы описать движение капли, надо понять, какую роль играет сила сопротивления воздуха, т.е. можно ли падение капли считать свободным. Кроме того, надо выяснить, может ли сила сопротивления привести к деформации капли до того, как свинец отвердеет. Мы обсудим природу силы сопротивления и оценим ее величину.

Ниже в таблице приведены все те величины, знание которых необходимо для описания процесса изготовления дроби башенным способом.

Температура плавления свинца $T_{пл}$	327 °C
Плотность свинца $\rho_{св}$	$11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3
Поверхностное натяжение свинца σ (при 350 °C)	0,44 Н/м
Удельная теплоемкость свинца $c_{св}$	130 Дж/(кг · К)
Удельная теплота плавления свинца λ	22,5 кДж/кг
Плотность воздуха $\rho_в$	1,2 кг/м^3
Удельная теплоемкость воздуха c_p	1,0 кДж/(кг · К)
Теплопроводность воздуха γ	0,025 Вт/(м · К)
Вязкость воздуха η	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с)

Параметры воздуха приведены для 20 °C.

Теплоотдача

Возможны два способа передачи тепла свинцовым шариком в окружающий мир: а) тепловое излучение и б) теплообмен с окружающим воздухом при непосредственном контакте. Опишем оба эти механизма, а потом выясним, какой из них является главным при скоростях порядка 10 м/с (характерная скорость при падении с нескольких десятков метров).

Для оценки вклада теплового излучения воспользуемся законом Стефана – Больцмана[1], описывающим излучение абсолютно черного тела при температуре T:

$$E_{изл} = \sigma_{изл} T^4 S\,\Delta t, \quad (2)$$

где $\sigma_{изл} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4) — постоянная Стефана – Больцмана. Температуру поверхности шарика будем считать постоянной и равной $T_{пл}$. Обратным излучением можно пренебречь — поскольку температура воздуха в 2 раза меньше, то обратное излучение меньше по крайней мере в 16 раз.

Теперь займемся оценкой той энергии, которую уносит обтекающий каплю воздух. Начнем с того, что напишем выражение для потока тепловой энергии через плоский тонкий слой вещества толщиной Δx и площадью S, если разность температур на границах слоя равна ΔT (рис. 1):

$$\Lambda \Delta E = \gamma \frac{\Delta T}{\Delta x} S\,\Delta t, \quad (3)$$

где ΔE — энергия, прошедшая через слой за время Δt, γ — теплопроводность (эту формулу называют

[1] *См., например, статью «Солнце, лампа и кометы» в этом номере журнала.*

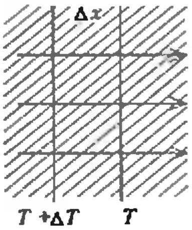


Рис. 1. Поток тепла идет от более горячей поверхности к более холодной

законом Фурье). Теплопроводность идеальных газов пропорциональна $\sqrt{T}$; мы же будем считать γ воздуха постоянным и равным его значению при 20 °С (см. таблицу).

Чтобы оценить теплоотдачу горячего шарика окружающему воздуху, поступим следующим образом. Во-первых, рассмотрим движение шарика с постоянной скоростью v. Когда мы найдем ответ для равномерного движения, мы сможем применить его к коротким участкам неравномерного движения. Во-вторых, будем считать, что основной перепад температуры от $T_{пл}$ (на поверхности шарика) до температуры окружающего воздуха T_0 происходит в узком слое толщиной δ ($\delta \ll r$). (Толщину слоя δ мы ниже оценим, исходя из баланса энергии, и убедимся в том, что большую часть времени это предположение выполняется.) В этом случае мы можем каждый участок тонкого пограничного слоя (рис.2,*а*) считать плоским и применять к нему формулу (3). Для потока энергии от шарика через пограничный слой получим

$$\Delta E \sim \gamma \frac{\Delta T}{\delta} S \Delta t\,, \qquad (4)$$

где $\Delta T = T_{пл} - T_0$, а $S = 4\pi r^2$ — площадь поверхности шарика.

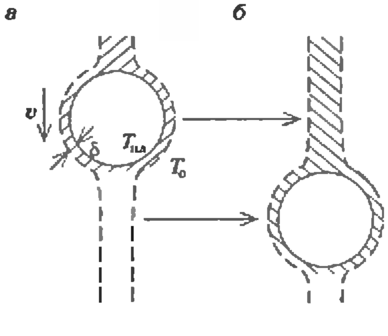


Рис.2. Шарик, движущийся со скоростью v, нагревает воздух в пограничном слое толщиной δ. а) Момент времени t; б) момент времени $t + 2r/v$. Область нагретого воздуха заштрихована

Поскольку температура воздуха массой $m_\delta = \rho_в S\delta$, содержащегося в пограничном слое, увеличилась за счет контакта с шариком на величину порядка ΔT, то он получил от шарика количество теплоты

$$Q_\delta \sim c_p m_\delta \Delta T\,.$$

Для оценки можно считать, что за время $\Delta t^* = 2r/v$ один пограничный слой вокруг шарика полностью сменится другим (рис. 2,*б*), т.е. за это время количество теплоты Q_δ уносится обтекающим шарик воздухом.

Значит, количество теплоты, полученное воздухом от горячего шарика за время Δt^* (см. уравнение (4)), должно быть равно Q_δ:

$$\gamma \frac{\Delta T}{\delta} S \frac{2r}{v} = c_p(\rho_в S\delta)\Delta T\,.$$

Отсюда получаем оценку для толщины пограничного слоя:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{2\gamma}{c_p\rho_в}} \cdot \sqrt{\frac{r}{v}}\,. \qquad (5)$$

Проверим теперь предположение о малой толщине слоя. Для самых маленьких дробинок ($2r = 1{,}25$ мм) при скорости $v = 1$ м/с отношение δ/r, вычисленное по формуле (5), дает значение 0,25 (это отношение пропорционально $1/\sqrt{r}$, так что для больших дробинок оно меньше). Так как скорость 1 м/с достигается уже через 0,1 с после начала падения, наше предположение хорошо выполняется почти все время полета (порядка 2—4 с для падения с нескольких десятков метров).

Подставляя выражение (5) для толщины слоя в формулу (4), получаем зависимость интенсивности отдачи тепла окружающему воздуху:

$$\Delta E \sim \gamma \frac{\Delta T}{\delta} 4\pi r^2 \Delta t \approx$$
$$\approx 9\Delta T\sqrt{\gamma c_p \rho_в}\, r^{3/2} v^{1/2} \Delta t\,. \qquad (6)$$

Теперь мы можем сравнить между собой интенсивности отдачи тепла за счет излучения (формула (2)) и за счет теплообмена с обтекающим каплю воздухом (формула (6)). Отношение этих интенсивностей равно

$$\frac{E_{изл}}{\Delta E} \sim 1{,}4\frac{\sigma_{изл} T^4}{\Delta T\sqrt{\gamma c_p \rho_в}}\left(\frac{r}{v}\right)^{1/2}.$$

Подставляя численные данные, получим, что даже для самой крупной дроби ($2r$ = 5мм) теплообмен превысит излучение уже при скорости 0,1 м/с. Видно, что вкладом излучения можно пренебречь.

Пренебрежем в первом приближении сопротивлением воздуха и подставим в формулу (6) зависимость скорости от времени для свободного падения шарика $v = gt$. Проинтегрировав по времени, получим в явном виде зависимость от времени потерянной на теплообмен с воздухом энергии:

$$E_{тепл}(t) \sim 6\Delta T\sqrt{\gamma c_p \rho_в}\, r^{3/2} g^{1/2} t^{3/2}\,. \qquad (7)$$

Чтобы оценить время падения, необходимое для полного отвердения шарика, надо приравнять это выражение к теплу, теряемому каплей (формула (1)):

$$6\Delta T\sqrt{\gamma c_p \rho_в}\, r^{3/2} g^{1/2} t^{3/2} =$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{св}\left(c_{св}(T - T_{пл}) + \lambda\right).$$

Получим, что необходимое время падения пропорционально радиусу шарика. Соответственно, необходимая высота башни пропорциональна r^2. Для первой оценки ограничимся только теплотой плавления, пренебрегая «перегревом» свинца. Подставляя численные данные, получим, что для маленькой дроби ($2r = 1{,}25$ мм) высота должна быть равна всего 2,5 м, а для большой ($2r = 5$ мм) — в 16 раз больше, т.е. около 40 м. Напомним, что высота Балтиморской дробовой башни (одной из самых высоких) составляет около 70 м.

Ясно, что наши оценки, полученные в рамках достаточно грубой и приближенной модели, верны с точностью до численного множителя порядка единицы. Но если модель содержит разумные качественные предположения, то она обычно способна правильно предсказать вид функциональных зависимостей. В данном случае квадратичная зависимость высоты от радиуса дроби выглядит весьма правдоподобно.

Производя оценки, мы пренебрегали начальным «перегревом» свинца. Учитывая, что изготовители дроби (кстати, можно ли их называть «дрободелы»?) старались, конечно же, излишне не перегревать расплавленный свинец, влияние «перегрева» на оценку для высоты не очень существенно. Однако, он таит в себе иную опасность. Пока капля свинца летит в жидком состоянии, не исключена возможность ее деформации силой сопротивления воздуха. И тут самое время поговорить об этом.

Сила сопротивления

Сопротивление движению любого тела в воздухе возникает по двум причинам. Во-первых, за счет вязкости воздуха возникает сила вязкого трения, которая пропорциональна скорости тела. Для шарика эта сила выражается формулой Стокса

$$F_{тр} = 6\pi\eta r v,$$

где η — вязкость воздуха. Во-вторых, за счет изменения импульса молекул воздуха, находящихся на пути шарика, возникает сила лобового сопротивления, которая при скоростях, малых по сравнению со скоростью звука, пропорциональна квадрату скорости тела:

$$F_{сопр} = ks\rho_в v^2, \qquad (8)$$

где s — площадь поперечного сечения тела (для шарика, конечно же, $s = \pi r^2$), а k — безразмерный множитель порядка единицы (для шарика $k \approx 0{,}21$).

Выражение (8) для лобового сопротивления можно получить из соображений размерности, пренебрегая вязкостью и считая, что сила сопротивления зависит только от поперечных размеров тела, его скорости и плотности воздуха. Попробуйте убедиться в этом сами. Кроме того, можно оценить изменение импульса молекул воздуха за единицу времени, считая, например, удары молекул неупругими:

$$\Delta p \sim N(m_0 v) = (nvs)(m_0 v) = \rho_в s v^2,$$

где m_0 — масса молекулы воздуха, n — концентрация молекул.

Вязкое трение играет существенную роль только при очень малой скорости тела (либо для очень маленького тела). Например, для шарика радиусом 0,1 мм сила $F_{сопр}$ сравняется с $F_{тр}$ уже при скорости

$$v = \frac{6\pi\eta r}{k\pi r^2 \rho_в} = \frac{6\eta}{k\rho_в r} \sim 0{,}4\ \text{м/с}.$$

Поэтому в дальнейшем мы будем говорить только о силе лобового сопротивления.

Посмотрим, когда сила лобового сопротивления начнет влиять на движение шарика. Например, найдем скорость, при которой эта сила станет равна $0{,}5\,mg$:

$$k\rho_в \pi r^2 v^2 = 0{,}5\rho_{св}\frac{4}{3}\pi r^3 g,$$

откуда получаем

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_{св} g r}{3k\rho_в}}.$$

Считая, что до этого момента падение происходило свободно, оценим пройденное расстояние как

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\rho_{св} r}{3k\rho_в}.$$

Для маленьких дробинок получаем $h \sim 8{,}5$ м, а для больших — $h \sim 35$ м. Видно, что сопротивление воздуха начинает сказываться еще до полного затвердения (особенно для больших дробинок).

Оценим теперь, при каких скоростях сила сопротивления начнет деформировать шарик из жидкого свинца. Наличие силы лобового сопротивления означает, что давление вокруг капли перестает быть одинаковым, а неравномерно сдавленная капля теряет сферическую форму. Среднее давление на переднюю поверхность больше, чем на заднюю, на величину

$$p_1 - p_2 = \frac{F_{сопр}}{s} = k\rho_в v^2.$$

Это означает, что разность между давлением свинца внутри капли и внешним давлением воздуха станет меньше для передней поверхности капли. Но эта разность давлений связана с радиусом кривизны поверхности (так называемое лапласово давление — см. Приложение): $\Delta p = 2\sigma_{св}/r$. Значит, передняя поверхность будет более плоской, чем задняя (радиус кривизны больше — рис.3). Выберем, к примеру, за критерий допустимой деформации условие, что радиусы кривизны передней и задней поверхностей должны отличаться не больше чем на 10%. Получаем для критической скорости уравнение

$$k\rho_в v^2 \sim 0{,}1\frac{2\sigma_{св}}{r},$$

откуда

$$v \sim \sqrt{\frac{\sigma_{св}}{\rho_в r}}.$$

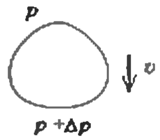


Рис.3. Капля деформируется разностью давлений на передней и задней поверхности

Видно, что этот эффект опаснее для крупной дроби. Действительно, время полета капли к началу отвердения пропорционально r, а время к началу деформации пропорционально $1/\sqrt{r}$. Для самых больших дробинок $v \sim 12$ м/с. Если подставить соответствующее время полета (1,2 с) в выражение (7), то получим теплоотдачу шарика за это время; приравнивая эту энергию к $c_{св}m(T - T_{пл})$, можно найти максимально допустимый перегрев свинца. Для больших дробинок максимально возможный перегрев оказывается порядка 50 °С; при большем перегреве капля начнет деформироваться раньше, чем начнется ее отвердение и образуется хотя бы тонкая корочка.

Приложение. О лапласовом давлении

Поверхностное натяжение приводит к тому, что давление по разные стороны искривленной поверхности оказывается различным. Ограничимся случаем сферической поверхности радиусом R и покажем, что давление внутри на

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

больше, чем снаружи. Рассмотрим маленький участок поверхности, ограниченный окружностью радиусом $r \ll R$ (рис.4). На тонкую пленку жидкости действуют силы поверхностного натяжения, направленные перпендикулярно границе по касательной к поверхности. Видно, что равнодействующая этих сил не равна нулю. Найдем ее величину. Из симметрии ясно, что равнодействующая направлена в сторону центра сферы. Проекция на это направление силы, действующей на маленький участок границы длиной Δl, равна $\sigma \cdot \Delta l \cdot \alpha$ (мы учли, что $\alpha = r/R \ll 1$). Значит, полная сила равна

$$F_\sigma = \sigma \cdot 2\pi r \cdot \alpha = \sigma \cdot 2\pi r \cdot \frac{r}{R}.$$

Так как рассматриваемый участок поверхности находится в равновесии, эта сила должна быть скомпенсирована разностью сил давления ΔpS. Из условия равновесия

$$\sigma \cdot \frac{2\pi r^2}{R} = \Delta p \cdot \pi r^2$$

получаем искомое выражение для Δp.

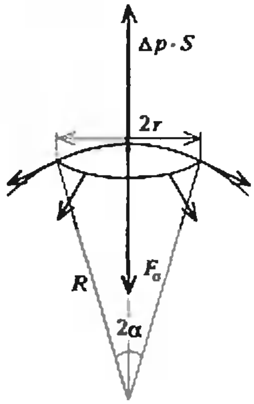


Рис.4. Сила поверхностного натяжения, действующая на участок искривленной поверхности, компенсируется разностью сил давления

Некоторые факты проективной геометрии

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Несколько лет назад в задачнике «Кванта» была опубликована следующая задача:

Если четырехугольник является вписанным в окружность и описанным вокруг другой окружности, то прямая, соединяющая центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

Решив эту задачу, я сформулировал более общее

Предложение. *Дана окружность и точка C внутри ее. Через точку C проведены 4 хорды (секущие) A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4. Пусть D — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, E — точка пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4. Тогда точки C, D, E лежат на одной прямой (рис. 1).*

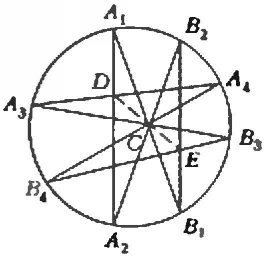


Рис. 1

Нетрудно понять, что утверждение исходной задачи есть частный случай Предложения. Действительно, пусть $A_1A_2A_3A_4$ — данный четырехугольник, A_iB_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — биссектрисы его углов. Так как в четырехугольник можно вписать окружность, биссектрисы пересекаются в центре этой окружности — точке C. Далее, B_1 и B_2 являются серединами двух дополнительных дуг описанной окружности A_1A_4, следовательно, B_1B_2 — диаметр этой окружности. Аналогично, B_3B_4 — также диаметр, и, значит, точка E — центр описанной окружности. Из Предложения следует, что прямая CE проходит через точку D пересечения диагоналей четырехугольника.

Итак, осталось доказать Предложение. Заметим, что в отличие от исходной задачи оно формулируется исключительно в терминах пересечений прямых и принадлежностей точек прямым. Быть может, вы встречались с такими утверждениями. Вот одно из них.

Теорема Паппа. *Пусть точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 расположены на двух прямых l и l_1 (рис. 2), а P, Q и R — точки пересечения прямых AB_1 и BA_1, BC_1 и CB_1, AC_1 и CA_1 соответственно. Тогда точки P, Q и R лежат на одной прямой.*

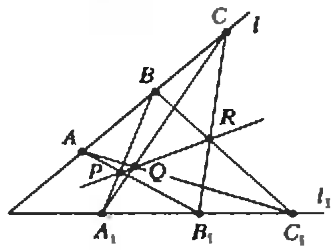


Рис.2

Центральная проекция

Естественный способ доказательства утверждений проективной геометрии — использование проективных преобразований, т.е. преобразований, при которых прямые переходят в прямые, а их точки пересечения — в точки пересечения. Одним из таких преобразований является центральная проекция.

Определение. Пусть в пространстве даны две плоскости π и π' и точка O — центр проекции, — не принадлежащая ни одной из них. *Центральной проекцией* называется отображение плоскости π в плоскость π', при котором точке A плоскости π ставится в соответствие точка пересечения A' прямой OA с плоскостью π'.

Заметим, что если плоскости π и π' параллельны, то центральная проекция является просто преобразованием подобия: для любых двух точек A и B плоскости π и их образов A' и B'

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Если плоскости π и π' (рис. 3) пересекаются, проведем плоскость σ, проходящую через точку O и параллельную плоскости π'. Пусть a — прямая, по которой плоскость σ пересекает плоскость π. Ясно, что точки этой прямой не имеют образа при центральной проекции — она их «отправляет в никуда». В то же время в точки прямой a', по которой плоскость σ', параллельная π, пересекает π', не переходят никакие точки плоскости π.

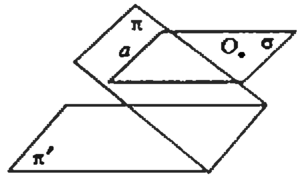


Рис.3

Для того чтобы облегчить формулировки теорем и доказательств, будем считать, что точкам прямой a' соответствуют бесконечно удаленные точки плоскости π, а точки прямой a переходят в бесконечно удаленные точки плоскости π'.

Поясним, что это значит. Все прямые пространства, проходящие через точку O, совершенно равноправны. Если прямая не лежит в плоскости σ, то она пересекает плоскость π в единственной точке, так что между такими прямыми и точками плоскости π имеется взаимно однозначное соответствие: каждой прямой соответствует единственная точка и, наоборот, каждой точке — единственная прямая. Будем теперь считать, что всякая прямая из плоскости σ (разумеется, проходящая через точку O) определяет *бесконечно удаленную точку плоскости* π (так же, как пересекающие плоскость π прямые определяют обычные точки плоскости).

Если в плоскости π взять любую прямую, то ей соответствует плоскость, проходящая через точку O и эту прямую. При этом, наоборот, всякая пересекающая π плоскость задает на ней прямую — линию пересечения. Все прямые, соответствующие бесконечно удаленным точкам плоскости π, лежат в плоскости σ. Будем считать, что плоскость σ *определяет бесконечно удаленную прямую*, на которой лежат все бесконечно удаленные точки плоскости π.

Так же мы можем поступать и с плоскостью π'. Теперь уже при центральной проекции в каждую точку пополненной плоскости π' переходит одна и только одна (может быть, бесконечно удаленная) точка плоскости π.

Нетрудно видеть, что на каждой обычной прямой теперь лежит ровно одна бесконечно удаленная точка, параллельные в обычном смысле прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке, и по-прежнему через каждые две точки можно провести единственную прямую (может быть, бесконечно удаленную).

Будем называть *проективной плоскостью* обычную плоскость, дополненную бесконечно удаленными точками.

Замечание. В этом определении нет никакой «мистики». Вот наглядная модель проективной плоскости.

Назовем пучком прямых множество всех прямых пространства, проходящих через некоторую фиксированную точку O. *Точкой проективной плоскости* π будем называть любую прямую этого пучка, а *прямой* — множество всех прямых пучка, принадлежащих обычной плоскости, проходящей через O.

При этом выполняется следующая *аксиома инцидентности*:

а) через любые две различные точки проективной плоскости π проходит одна и только одна прямая;

б) любые две различные прямые пересекаются в одной точке.

Теперь точкам обычной плоскости α в обычном пространстве соответствуют прямые пучка (они же точки проективной плоскости), пересекающие α. Бесконечно удаленным же точкам соответствуют прямые плоскости, проходящей через O параллельно α. Прямым плоскости α соответствуют проективные прямые, т.е. обычные плоскости, проходящие через O, пересекая α, а бесконечно удаленная прямая — это плоскость, проходящая через O параллельно α.

Проекции окружности

Вообще говоря, образ окружности при центральной проекции не является окружностью. Однако справедлива следующая, основная для нас

Теорема. *Дана окружность и точка C внутри нее. Существует центральная проекция, при которой данная окружность переходит в окружность, а точка C — в ее центр.*

Доказательство. Рассмотрим косой круговой конус (конус, в котором перпендикуляр из вершины на плоскость основания не попадает в центр). Пусть OAB — сечение конуса плоскостью, проходящее через его высоту и центр основания, $OA' = OA$, $OB' = OB$ (рис. 4). Из соображений симметрии ясно, что сечение конуса плоскостью, перпендикулярной поверхности чертежа и проходящей через $A'B'$, — окружность. Пусть C' — середина $A'B'$, C — точка пересечения AB и OC'. Применяя теорему синусов к треугольникам OAC, OBC, $OA'C'$, $OB'C'$, нетрудно вывести соотношение

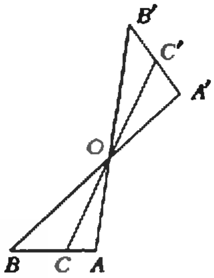


Рис.4

$$AC/BC = (AO/OB)^2.$$

Таким образом, выбрав нужное соотношение длин отрезков OA и OB и расположив точку O над нужным диаметром исходной окружности, можно всегда добиться, что точка C перейдет в центр C' окружности, содержащей точки A и B. Теорема доказана.

Теперь доказательство Предложения не составит труда. Действительно, точку C в силу основной теоремы можно считать центром окружности. Тогда точки A_1 и B_1 центрально симметричны относительно C. Следовательно, центрально симметричными являются и соединяющие их прямые, и точки D и E пересечения этих прямых, ч.т.д. (рис. 5).

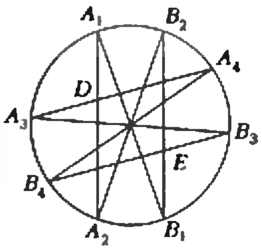


Рис.5

Упражнение 1. *Докажите, что Предложение остается верным, если точка C лежит не внутри, а вне окружности.*

Указание. Покажите, что точку C можно спроектировать в бесконечно удаленную.

Итак, Предложение доказано, и значит, получено решение исходной задачи. Однако это далеко не все, что можно получить из Предложения. Покажем, как вывести из него ряд хорошо известных фактов проективной геометрии (разумеется, их можно получить и непосредственно из основной теоремы).

Следствие 1. *Диагонали вписанного в окружность четырехугольника и четырехугольника, образованного касательными к окружности в его вершинах (два таких четырехугольника будем называть соответствующими), пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Будем сближать на рисунке 1 точки A_1 и A_2, A_3 и A_4. В пределе прямые A_1B_1 и A_2B_2, а также A_3B_3 и A_4B_4 сольются и превратятся в диагонали вписанного четырехугольника, а прямые A_1A_2, A_3A_4, B_1B_2, B_3B_4 станут касательными к окружности. Точки D и E превратятся в противоположные вершины описанного четырехугольника, и диагональ DE пройдет через C в силу Предложения. Поскольку обе диагонали описанного четырехугольника равноправны, их точка пересечения совпадает с C.

Следствие 2. *Противоположные стороны вписанного четырехугольника пересекаются на диагонали соответствующего описанного.*

Примечание. Пересечение понимается в смысле проективной плоскости, т.е. включает случай, когда все три прямые параллельны.

Это утверждение доказывается аналогично предыдущему, если взять точку C вне окружности.

Следствие 3. *Дана окружность и точка C вне ее. Пользуясь одной линейкой, можно провести касательные к окружности из данной точки, как показано на рисунке 6.*

Доказательство. Проведем через точку C четыре секущие в соответствии

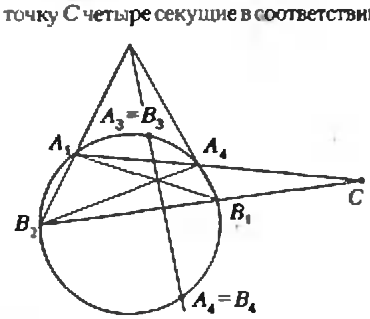


Рис.6

с Предложением и будем передвигать секущие A_3B_3 и A_4B_4, пока они не превратятся в касательные. При этом совпадут точки A_3 и B_3, A_4 и B_4. По Предложению точки D и E окажутся на прямой, соединяющей точки касания, и при этом прямая DE должна пройти через C. Очевидно, что это возможно только при совпадении D и E. Таким образом, прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются на прямой A_3A_4. Очевидно, что то же самое можно сказать про прямые A_1B_2 и A_2B_1, что и завершает доказательство.

Полярное соответствие

Прежде чем формулировать дальнейшие следствия, необходимо дать одно определение. Пусть дана окружность с центром O и радиусом R и точка A, отличная от O. Построим на радиусе OA точку A', такую что $OA \cdot OA' = R^2$, и проведем через нее прямую a, перпендикулярную OA. Прямая a называется *полярой* точки A, а точка A — *полюсом* прямой a. Ясно, что таким образом определены поляры всех точек, кроме O, и полюсы всех прямых, не проходящих через O. Чтобы избавиться от этого недостатка, будем считать полярой точки O бесконечно удаленную прямую, а полюсом прямой, проходящей через O, бесконечно удаленную точку, являющуюся пересечением прямых, перпендикулярных данной.

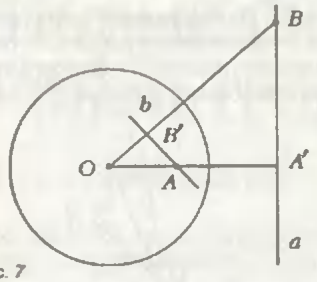


Рис. 7

Из подобия треугольников OAB' и $OA'B$ на рисунке 7 следует, что если точка A лежит на поляре b точки B, то поляра a точки A проходит через B. Кроме того, нетрудно показать, что поляра точки A, лежащей вне окружности, соединяет точки касания с окружностью касательных, проведенных из A. Заметим еще, что так как касательная к кривой при проектировании переходит в касательную, понятия полюса и поляры являются чисто проективными. Кроме того, можно сформулировать следующий **принцип двойственности:**

Пусть доказано некоторое проективное утверждение. Тогда будет верным и двойственное утверждение, получающееся при следующей замене терминов:

точка ↔ прямая;

проходить через точку ↔ лежать на прямой;

касаться окружности ↔ лежать на окружности.

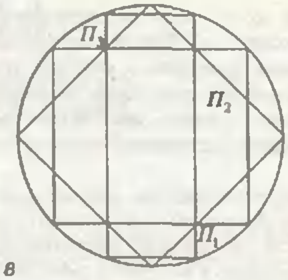


Рис. 8

Следствие 4. *Точки пересечения противоположных сторон вписанного и соответствующего описанного четырехугольников лежат на одной прямой.*

Доказательство немедленно следует из принципа двойственности и следствия 1.

Следствие 5. *Пусть ABCD — вписанный в окружность четырехугольник, K, L — точки пересечения его противоположных сторон, M — точка пересечения диагоналей. Тогда треугольник KLM — автополярный (т.е. каждая его вершина является полюсом противоположной стороны).*

Доказательство непосредственно получается из рисунка 6.

Следствие 6. *Диагонали описанного четырехугольника являются двумя сторонами автополярного треугольника.*

Доказательство. Это утверждение двойственно следствию 5.

Упражнение 2. Сформулируйте утверждения, двойственные основной теореме, Предложению, следствию 2.

И наконец, посмотрим еще раз на рисунок 6. Мы видим, что по вписанному четырехугольнику $A_1A_2B_1B_2$ можно построить другой вписанный четырехугольник, который мы назовем *производным*. Одной его диагональю является A_3A_4, другой — поляра точки D. Из следствий 1 и 2 вытекает, что диагонали этого четырехугольника совпадают также с диагоналями соответствующего исходному описанного. Поэтому можно говорить о паре соответствующих четырехугольников, являющейся производной данной пары. Из рисунка 6 видно, что диагонали

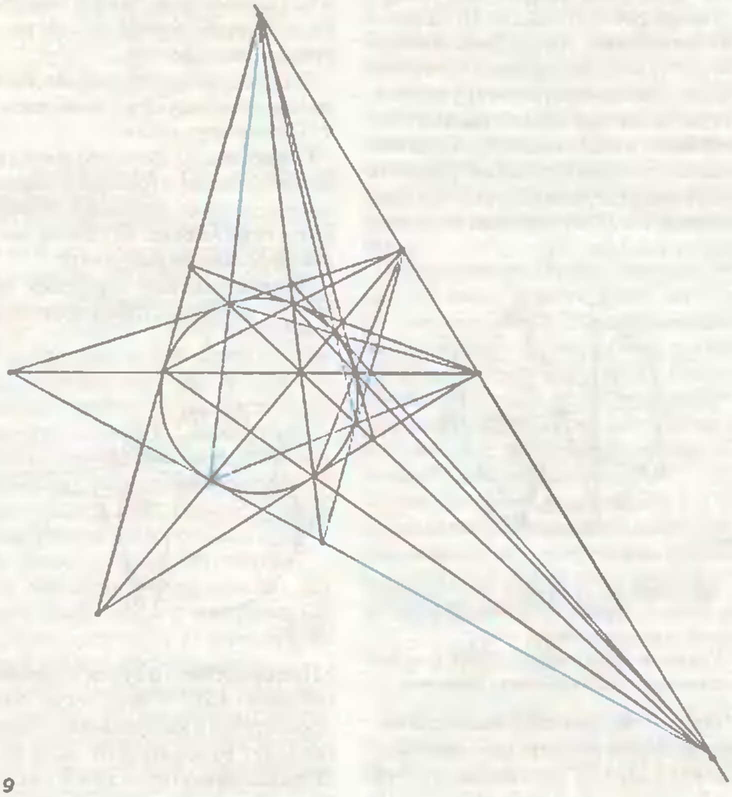


Рис. 9

всех четырех четырехугольников пересекаются в одной точке. Спроектируем эту точку в центр окружности в соответствии с основной теоремой. Тогда (рис. 8):

1) Исходный четырехугольник Π_1 превратится в прямоугольник.

2) Производный четырехугольник Π_2 будет квадратом.

3) Второй производный четырехугольник Π_3 будет квадратом, повернутым на 45° относительно Π_2.

4) Третий производный четырехугольник Π_4 совпадет с Π_2.

Таким образом, для любого исходного четырехугольника Π_1 последовательность его производных имеет вид Π_2, Π_3, Π_2, Π_3...

На рисунке 9 изображены две взаимнопроизводных пары четырехугольников. Не правда ли, красивая картинка?

В заключение заметим для тех, кто знаком с понятием конического сечения, что все приведенные утверждения остаются верными, если заменить окружность эллипсом, параболой или гиперболой. Это связано с тем, что каждая из перечисленных кривых является проекцией окружности. Попробуйте сами сделать соответствующие рисунки. При этом учтите, что с проективной точки зрения парабола касается бесконечно удаленной прямой в точке ее пересечения с осью параболы, а гипербола пересекает бесконечно удаленную прямую в двух точках, причем касательными к гиперболе в этих точках являются ее асимптоты.

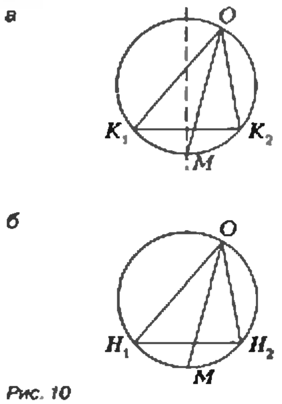


Рис. 10

P.S. Как указал И.Ф.Шарыгин, предложение можно вывести из теоремы Паскаля: *точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.* Попробуйте восстановить этот вывод. Подумайте также, можно ли вывести теорему Паскаля из основной теоремы.

Дополнение

Доказывая основную теорему, мы сочли очевидным тот факт, что сечение косого кругового конуса плоскостью, проходящей через $A'B'$, — окружность. В действительности это не так тривиально, и поэтому приведем строгое доказательство.

Рассмотрим, как и раньше, сечение конуса его плоскостью симметрии — ΔOK_1K_2 (рис.10,*а*). Опишем около него окружность и проведем биссектрису угла K_1OK_2, которая пересечет эту окружность в точке M. Дуги MK_1 и MK_2 равны, так как им соответствуют равные вписанные углы, поэтому перпендикуляр, опущенный из центра окружности на K_1K_2, проходит через M. При вращении окружности вокруг этого перпендикуляра образуется шар, в который вписан данный конус. При этом точка M равноудалена от всех точек оснований конуса.

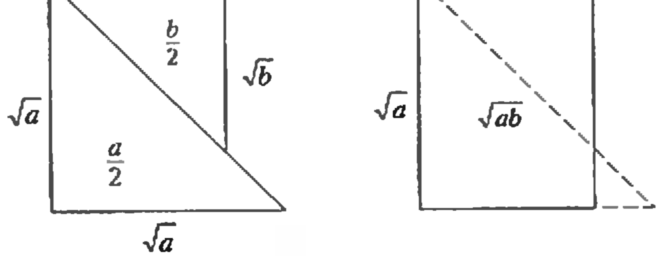
Проведем теперь произвольную плоскость через прямую OM. Она пересечет шар по окружности, а конус — по треугольнику OH_1H_2, вписанному в эту окружность (рис.10,*б*). При этом, как было показано выше, хорды MH_1 и MH_2 будут равны, а значит равны и соответствующие им вписанные углы H_1OM и H_2OM. Таким образом, в любом сечении конуса, проходящем через прямую OM, эта прямая является биссектрисой угла при вершине и, значит, осью симметрии конуса (если рассматривать его как совокупность прямых, проходящих через вершину, а не их отрезков).

Возвращаясь к рисунку 4, заключаем, что сечение конуса плоскостью, симметричной плоскости основания AB относительно его оси, также будет окружностью, а значит, окружностью будет и любое сечение параллельной плоскостью, в том числе и плоскостью $A'B'$.

НАМ ПИШУТ

Еще одно доказательство теоремы о средних

Наш читатель из Грузии В.Самхарадзе прислал в редакцию вот такое наглядное доказательство теоремы о средних:



$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1996 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—96» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1531» или «Ф1538». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи Ф1538—Ф1547 предлагались на заочном туре 2-й олимпиады Сороса по физике.

Задачи М1531 — М1535, Ф1538 — Ф1547

М1531. На плоскости дан квадрат и невидимая точка P. Разрешается провести любую прямую и спросить, по какую сторону от нее (или на самой прямой) лежит P. За какое наименьшее число вопросов можно выяснить, лежит ли P внутри квадрата?

А.Канель

М1532. Существуют ли
а) 4 различных натуральных числа,
б) 5 различных натуральных чисел,
в) 5 различных целых чисел,
г) 6 различных целых чисел
таких, что сумма любых трех из них — простое число?

П.Филевич

М1533. На плоскости даны три точки A, B, C. Проведите через C прямую, произведение расстояний до которой от A и B наибольшее. Всегда ли такая прямая единственна?

Н.Васильев

М1534. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$a_1+a_2+\ldots+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ge\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)^2.$$

Л.Курляндчик

М1535. Куб с ребром 1 надо обшить (в один слой) куском ткани. а) Докажите, что если узелки, где сходятся (по крайней мере) три шва, могут лежать только в вершинах, то суммарная длина швов не менее 7. б) Может ли эта длина быть меньше 6,5?

В.Шаповалов

Ф1538. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Его ускорение линейно спадает с высотой от начального значения a_0 до нуля на высоте H. Какую скорость приобретет шар, достигнув высоты H? Какая скорость будет у шара на половине этой высоты? За какое время шар поднимется на высоту H?

З.Рафаилов

Ф1539. На рисунке 1 показана система, содержащая два подвижных блока и три груза, массы которых m, $2m$ и M. Какую массу M нужно взять, чтобы вся система весила $4mg$? Блоки и нити считать невесомыми, нити нерастяжимы. Движение всех грузов происходит в вертикальном направлении.

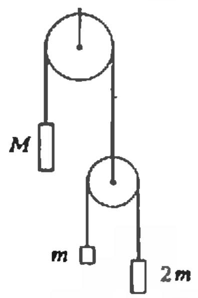


Рис. 1

Р.Александров

Ф1540. В системе, изображенной на рисунке 2, трение отсутствует, а внешняя сила равна F и составляет угол

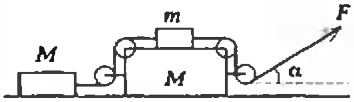


Рис.2

α с горизонтальной плоскостью. Найдите ускорения каждого из тел. Массы тел указаны на рисунке.

А.Зильберман

Ф1541. На гладком горизонтальном столе вдоль одной прямой расположены шарики, массы которых m, M и $2M$. Шарик массой m налетает на шарик массой M, и между ними происходит абсолютно упругий лобовой удар. При каких отношениях m/M в системе произойдет еще ровно один удар?

А.Старов

Ф1542. Сосуд с разреженным гелием разделен на две равные части легким подвижным поршнем. Газ в одной половине сосуда начинают нагревать, поддерживая температуру газа в другой части сосуда неизменной. Какое количество теплоты нужно сообщить газу в нагреваемой части сосуда, чтобы его температура возросла на небольшую величину ΔT? Всего в сосуде содержится ν молей газа.

З.Рафаилов

Ф1543. Две большие квадратные пластины площадью S каждая находятся на малом расстоянии d одна от другой, образуя плоский конденсатор. Посредине между ними находится еще одна такая же пластина, заряженная зарядом Q. Наружные пластины соединены друг с другом резистором с большим сопротивлением R. Среднюю пластину быстро передвигают по направлению к одной из наружных пластин так, что она оказывается на расстоянии $d/3$ от нее. Какое количество теплоты выделится после этого на резисторе?

Р.Александров

Ф1544. В схеме на рисунке 3 два из трех резисторов одинаковые, а сопротивления амперметров пренебрежимо малы.

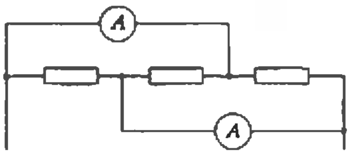


Рис.3

Один из амперметров показывает $I_1 = 1$ А, показания второго $I_2 = 2$ А. Найдите токи через каждый из резисторов.

М.Учителев

Ф1545. Длинный соленоид радиусом r содержит N витков на каждый метр длины. По соленоиду пропускают ток I (известно, что магнитное поле такого соленоида практически однородно внутри и очень мало снаружи). На одной оси с соленоидом находится длинный (но не такой длинный, как соленоид) легкий бумажный цилиндр радиусом R и высотой H, равномерно заряженный по поверхности полным зарядом Q. Ток соленоида уменьшают в 3 раза, при этом цилиндр приходит во вращение вокруг своей оси. В какую сторону и с какой угловой скоростью вращается цилиндр?

З.Рафаилов

Ф1546. Заряженный до напряжения $U = 100$ В конденсатор подключают к катушке индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн. При какой емкости конденсатора сила тока в катушке через $\tau = 0{,}01$ с окажется не меньше $I = 0{,}03$ А?

А.Зильберман

Ф1547. На плоскую поверхность плосковогнутой линзы с фокусным расстоянием -10 см падает вдоль главной оптической оси тонкий однородный пучок света. Диаметр пучка составляет 0,1 см, мощность в пучке 100 Вт. Оцените величину силы, действующей на линзу. Куда направлена эта сила? Поглощением света в линзе пренебречь. Как изменится ответ, если в линзе поглощается 0,1% падающей мощности света?

Решения задач М1501—М1510, Ф1518—Ф1527

М1501. *Про числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ известно, что для всех x $\left|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx\right| \le \left|\sin x\right|$. Докажите, что $\left|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n\right| \le 1$.*

При $x \ne 0$ имеем

$$\left|a_1 \frac{\sin x}{x} + 2a_2 \frac{\sin 2x}{2x} + \ldots + na_n \frac{\sin nx}{nx}\right| \le \left|\frac{\sin x}{x}\right|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to 0$, получаем

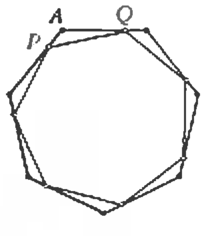
$$\left|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n\right| \le 1.$$

Неравенство задачи доказано.

В.Сендеров

М1502. *Прямая отрезает от правильного n-угольника со стороной 1 треугольник APQ так, что $AP + AQ = 1$ (A — вершина n-угольника). Найдите сумму углов, под которыми отрезок PQ виден из всех вершин n-угольника, кроме A.*

Вместо того чтобы менять положение вершины, из которой мы смотрим на отрезок QP, можно вершину зафиксировать, а менять положение стороны (вращая n-угольник). Таким образом, интересующая нас сумма равна сумме углов, под которыми из точки A видны все стороны правильного n-угольника, вписанного в данный, одна из сторон которого — PQ. А эта сумма равна $\angle PAQ = \pi(n-2)/n$.



В.Произволов

М1503. *Все натуральные числа раскрашены в два цвета — черный и белый. Известно, что сумма черного и белого — черная, а произведение черного и белого — белое. а) Докажите, что произведение двух белых — белое. б) Опишите все возможные варианты раскраски.*

а) Если 1 — белое число, то любое число $n = 1 \cdot n$ — белое. Пусть 1 — черное, m и n — белые. Тогда $n + 1$ — черное, $m(n + 1) = mn + m$ — белое, а значит mn — белое (иначе $mn + m$ — черное).

б) **Ответ**: белые числа — кратные некоторому q, черные — остальные.

Докажем, что любая раскраска — одна из указанных в ответе. Пусть $q > 1$ — наименьшее белое число (случай $q = 1$ очевиден). Предположим, что некоторое b, не кратное q, — белое. Пусть $b = aq + r$, $0 < r < q$. Тогда из условия следовало бы, что aq и r — белые, а это противоречит выбору q.

П. Филевич

М1504. *а) Существуют ли натуральные числа a, b, c такие, что из двух чисел $a/b + b/c + c/a$ и $b/a + c/b + a/c$ ровно одно — целое? б) Докажите, что если они оба целые, то $a = b = c$.*

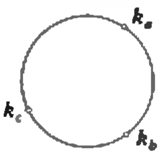
а) Существуют натуральные числа a, b, c такие, что из двух чисел $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ ровно одно является целым.

Действительно, любой простой делитель одного из чисел a, b, c является также делителем хотя бы одного из двух остальных чисел. Пользуясь этим соображением, строим пример: $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$.

Замечание. В этом примере $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = 5$. Если $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = 3$, где a, b, c — числа одного знака, то, очевидно, $a = b = c$.

Неизвестно, существуют ли натуральные числа a, b и c такие, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = 4$.

б) **Первое решение.** Разложим числа a, b, c на простые сомножители. Предположим, что найдется такое простое число p, которое входит в разложения a, b, c с показателями k_a, k_b, k_c, причем не все числа k_a, k_b, k_c равны между собой (если такого p нет, то все числа a, b, c равны). Поместим числа k_a, k_b, k_c на окружность (см. рисунок) и выберем такое направление обхода окружности —



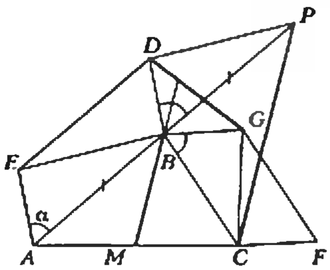
по часовой стрелке или против нее, — что при движении по этому направлению показатель возрастает только один раз. В первом случае рассмотрим сумму $a/b + b/c + c/a$ (во втором случае такие же рассуждения применим к сумме $a/c + c/b + b/a$). После сокращения дробей a/b, b/c и c/a множитель p в знаменателях двух из них будет отсутствовать, а в знаменателе третьей дроби сохранится. Ясно, что сумма таких дробей не может быть целым числом.

Второе решение. Пусть $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = p$, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} = q$, $\frac{a}{b} = x_1$, $\frac{b}{c} = x_2$ и $\frac{c}{a} = x_3$. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = p$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q$ и $x_1x_2x_3 = 1$, поэтому по теореме Виета числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями уравнения $x^3 - px^2 + qx - 1 = 0$. По теореме о рациональном корне многочлена с целыми коэффициентами рациональными корнями данного уравнения могут являться только числа 1 и -1. Поэтому $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$, откуда $|a| = |b| = |c|$.

Н. Васильев, А. Грибалко

М1505. *Вершины A, B и B, C треугольника ABC служат соответственными вершинами двух подобных друг другу параллелограммов $ABDE$ и $BCFG$, построенных на сторонах AB и BC вне треугольника. Докажите, что медиана BM треугольника ABC при продолжении образует с прямой DG углы, равные углам параллелограммов.*

Пусть $\angle CBG = \angle BAE = \alpha$, для определенности, $\alpha \le \pi/2$. На продолжении отрезка AB отложим отрезок $BP = AB$ (см. рисунок). Очевидно, треугольник BDP равен AEB и, следовательно, подобен треугольнику BGC, т.е. $\angle PBD = \alpha$ и $BP/BD = BC/BG$. Отсюда следует, что последовательно выполняя поворот вокруг B на угол α



(на нашем рисунке — по часовой стрелке) и гомотетию с центром B и коэффициентом k, мы переведем точку D в P, G в C, а значит, прямую DG в PC. Поскольку при нашем повороте все прямые поворачиваются на угол α, а гомотетия переводит любую прямую в параллельную ей, угол между DG и PC равен α. Остается заметить, что отрезок BM параллелен PC как средняя линия в треугольнике APC.

В. Дубровский

М1506. *Докажите, что любой отрезок числовой оси можно разбить на несколько черных и белых отрезков так, что суммы интегралов а) от любого квадратного трехчлена, б) от любого многочлена степени не выше n по белым и по черным отрезкам равны.*

Докажем индукцией по n, что существует разбиение отрезка $[a, b]$ на черные и белые кусочки, при котором суммы интегралов по черным и по белым кусочкам любого многочлена степени не выше n равны.

Заметим, что достаточно доказать это для какого-то одного отрезка, скажем $[0; 1]$, поскольку при линейном преобразовании $x \to a + (b - a)x$ степень многочлена и свойства разбиения сохраняются.

При $n = 1$ достаточно разбить отрезок на четыре равных кусочка, крайние объявить черными, а средние — белыми (рис. 1).

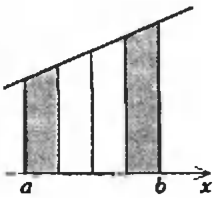


Рис. 1

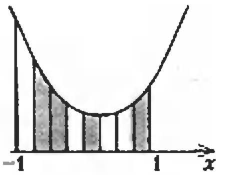


Рис. 2

Предположив, что для многочленов степени $n-1$ утверждение доказано, рассмотрим многочлен степени n

$$P_n(x)=ax^n+P_{n-1}(x)$$

на отрезке $[-1;1]$. Разобьем отрезок $[0;1]$ так, как требуется для многочленов степени $n-1$, а разбиение $[-1;0]$ возьмем симметричным ему относительно 0, если n нечетно, и — симметричным с заменой цвета (черного на белый и обратно), если n четно (рис. 2). Тогда для $P_{n-1}(x)$ суммы интегралов равны на каждой половине $[-1;0]$ и $[0;1]$, а для ax^n сокращаются интегралы по кусочкам, симметричным относительно 0.

Замечание. Конечно, индукцию можно начать и с $n=0$, разбив отрезок пополам — на черный и белый.

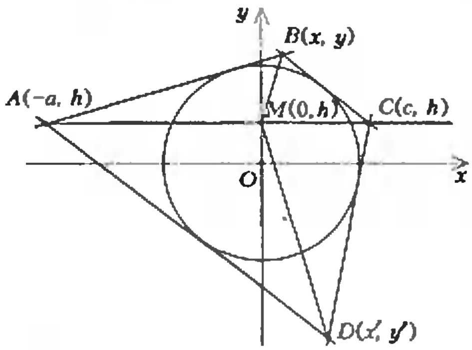
Г. Кондаков

М1507. *Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O; M — основание перпендикуляра, опущенного из O на прямую AC. Докажите, что точка O равноудалена от BM и DM.*

Мы, вопреки обыкновению, приведем решение задачи с помощью метода координат. (Подписчики журнала могут сравнить его с геометрическим решением в книге «Московские математические олимпиады 60 лет спустя» — приложении к предыдущему номеру; задача предлагалась 11-классникам на отборе на Российскую олимпиаду в 1995 году. Заметим, что нередко в условиях дефицита времени лобовое аналитическое решение — спасательный круг «профессионалов»-олимпиадников.) Единственное, что нам потребуется — формула для расстояния ρ от начала координат до прямой $Ax+By+C=0$:

$$\rho=|C|\Big/\sqrt{A^2+B^2}\,. \qquad (1)$$

Выберем систему координат с началом в центре круга O так, чтобы прямая AC была параллельна оси Ox, радиус круга примем за 1; остальные обозначения показаны на рисунке ($a>1$, $c>1$, $y>0$, $y'<0$, $-1<h<1$). Для решения задачи достаточно доказать, что прямые BM и DM имеют одинаковый (по модулю) наклон к оси Ox,



точнее,

$$\frac{y-h}{x}=-\frac{y'-h}{x'} \qquad (2)$$

(случай, когда M — середина AC, $x=x'=0$, очевиден). Уравнения прямых AB и CB удобно записать в виде

$$x+a=p(y-h), \qquad (3)$$

$$x-c=-q(y-h), \qquad (4)$$

($1/p$ и $-1/q$ — их угловые коэффициенты).

Согласно (1), условие их касания с кругом:

$$(a+ph)^2=1+p^2,\ (c+qh)^2=1+q^2, \qquad (5)$$

или

$$p^2\left(1-h^2\right)-2aph-\left(a^2-1\right)=0,$$

$$q^2\left(1-h^2\right)-2cqh-\left(c^2-1\right)=0,$$

откуда (поскольку $p>0$, $q>0$)

$$p=\frac{ah+\sqrt{a^2+h^2-1}}{1-h^2},\ q=\frac{ch+\sqrt{c^2-h^2-1}}{1-h^2}. \qquad (6)$$

Решая систему уравнений (3), (4), найдем

$$x=\frac{pc-qa}{p+q}=\frac{d}{p+q},\ y-h=\frac{c+a}{p+q},\ \frac{y-h}{x}=\frac{c+a}{d},$$

где

$$d=\left(c\sqrt{a^2+h^2-1}-a\sqrt{c^2+h^2-1}\right)\Big/\left(1-h^2\right).$$

Из той же системы уравнений (3), (4) находятся x', $y'-h$ и их отношение, — только вместо положительных корней p, q уравнений (5) надо взять отрицательные, т.е. поставить минусы перед радикалами в (6). Отсюда следует (2): ведь d лишь изменит знак!

Н. Васильев

М1508. *Геологи взяли с собой 80 банок консервов. Массы всех банок известны (имеется список) и различны. Этикетки на банках потерялись, и лишь один завхоз знает, где что. Он хочет доказать это окружающим, используя только список и чашечные весы со стрелкой, показывающей разность весов грузов на одной и другой чашке. Докажите, что он а) может сделать это за четыре взвешивания, б) не может за три.*

а) Для простоты рассуждения завхоз добавляет одну пустую банку (массой 0) и включает ее в список.

Первое взвешивание он организует так: на одну чашку он кладет 27 самых тяжелых банок, а на другую — 27 самых легких (он знает, какие банки нужно для этого взять). Получается разность, наибольшая из всех возможных. Остальные члены экспедиции должны признать, что разбиение на три группы (27 самых тяжелых, 27 самых легких и 27 остальных) проведено правильно. Завхоз помечает банки буквами «т», «с» и «л» (тяжелые, средние и легкие).

Второе взвешивание и последующие организуются аналогичным образом. Пусть банки после k-го взвешивания разбиты уже на 3^k групп по 3^{4-k} банки, помеченных некоторым словом из k букв «т», «с» и «л». Из каждой группы берется треть самых тяжелых троек и треть самых легких; тяжелые кладутся на одну чашку весов, лег-

кие — на другую. В результате каждая треть каждой группы определяется однозначно и образует группу следующего ранга, а банки помечаются еще одной k-й буквой «т», «с» или «л».

После четвертого взвешивания группы будут состоять из одной банки; при этом все банки помечаются словом из четырех букв. Четверка букв однозначно указывает, с какой банкой мы имеем дело, и задача завхоза решена.

б) Пусть проведено три взвешивания. Каждая банка при первом взвешивании либо оказалась на той чашке весов, которая перевесила, либо на более легкой, либо находилась в стороне. В зависимости от этого пометим банку одной из букв «т», «с», «л» («с» означает, что банка не взвешивалась). Аналогичным образом, ставим эти буквы в результате второго и третьего взвешиваний. Слов из трех букв всего 27, а банок — 80. Значит, найдутся по меньшей мере две банки с одинаковой маркировкой. Это означает, что мы не получили никаких сведений, которые позволяют различить эти две банки между собой, так что трех взвешиваний недостаточно.

Замечание. Точно так же для N банок можно доказать, что наименьшее число взвешиваний, необходимое для их идентификации, равно наименьшему целому числу, не меньшему $\log_3 N$. Это — пример задачи, где подсчет «количества информации» (пункт б) решения) дает совершенно точную оценку.

Н. Константинов, А. Толпыго

М1509. *На плоскости расположено несколько точек, соединенных непересекающимися дугами. На каждой дуге написано одно из чисел 1, 2, 3. Пусть в каждой точке сходятся ровно три дуги, занумерованных разными числами. Припишем каждой точке знак + или −, в зависимости от того, в каком порядке — по часовой стрелке или против — встречаются номера 1, 2, 3 входящих в нее дуг. Докажите, что разность между числом положительных и отрицательных точек делится на 4.*

На рисунках 1, 2 изображены простейшие карты, удовлетворяющие условию задачи, с двумя и четырьмя точками (вершинами карты); положительные вершины обозначены черными кружками, отрицательные — белыми. Разность d между числом тех и других в первом случае равна нулю, во втором — четырем. Разумеется, число n вершин такой карты всегда четно (поскольку в каждой вершине сходится три дуги, оно в три раза меньше удвоенного числа дуг). При $n = 2$ такая карта существует лишь одного вида, изображенного на рисунке 1.

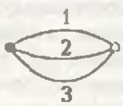


Рис.1

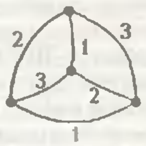


Рис.2

Докажем утверждение задачи индукцией по числу вершин: считая, что для карт с числом вершин меньшим n уже доказано, что разность d делится на 4, докажем, что это верно и для карты с n вершинами. Для этого мы покажем, как можно локально изменить карту — убрать несколько соседних вершин, не меняя остальных вершин и связывающих их дуг, и убедимся, что d при этом меняется на величину, кратную 4.

Заметим, что если карта несвязна, т.е. состоит из двух или нескольких отдельных карт, между которыми нет дуг, то утверждение достаточно доказать для каждой связной компоненты. Поэтому можно считать, что мы рассматриваем связную карту с n вершинами, $n > 2$.

Рассмотрим сначала случай, когда в связной карте имеются и белые, и черные вершины. Тогда найдется ребро, соединяющее черную и белую вершину. На рисунке 3

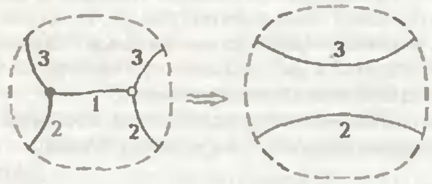


Рис.3

показано, как можно убрать эти две вершины и соединить концы двух пар приходящих к ним дуг, — чтобы полученная карта с $n - 2$ вершинами вновь удовлетворяла условию задачи. При этом разность d не меняется.

Осталось рассмотреть случай, когда все вершины карты одного цвета, скажем, черные. (Заметим, что в такой карте дуги, ограничивающие какую-либо «страну», занумерованы периодически: 1, 2, 3, 1, 2, 3, ..., так что число вершин страны кратно трем. Можно показать, что в такой карте обязательно есть треугольная страна, — но мы не будем этим пользоваться.) Редукция — переход от карты с n вершинами к карте с $n - 2$ вершинами — показана на рисунке 4. Здесь вместо трех черных вершин одной страны, идущих подряд, появляется одна белая вершина, так что разность d, которая для исходной карты равнялась n, становится равной $(n - 3) - 1 = n - 4$, т.е. есть меняется на 4.

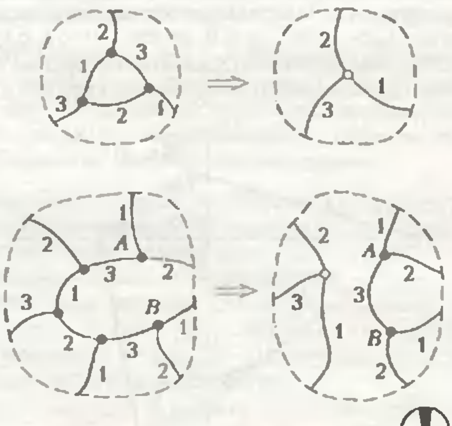


Рис.4

У этой задачи есть более изысканное решение, связанное с раскраской карты, расположенной на сфере, в 4 цвета. Особенно наглядно его можно объяснить для второго из рассмотренных выше случаев (черных вершин): исходная карта допускает непрерывное отображение, сохраняющее ориентацию (накрытие), на простейшую карту на сфере из четырех треугольников (см. рис.2), при котором вершины переходят в вершины, а каждое ребро карты отображается на ребро с тем же номером; при этом $d/4$ равно степени накрытия (числу слоев). Именно из исследований, связанных с теоремой о четырех красках, и возникла в свое время эта задача (см. статью Э.Г. Белаги «Арифметика на географической карте», «Квант» № 4, 1974; в то время доказательство теоремы о том, что каждую карту можно раскрасить в четыре краски, еще не было получено).

Н.Васильев

М1510. *Докажите, что существует*
а) хотя бы одно составное число n такое, что $3^{n-1}-2^{n-1}$ делится на n;
б) бесконечно много таких составных n.

Чтобы формулировка показалась более естественной, достаточно вспомнить малую теорему Ферма (МТФ). Из нее следует, что при всяком простом $p>3$ число $3^{p-1}-2^{p-1}=\left(3^{p-1}-1\right)-\left(2^{p-1}-1\right)$ делится на p.
Конечно, из решения б) будет следовать а). Однако есть много подходов, дающих решение а), которые, по-видимому, не ведут к решению б). Укажем три из них. (Всюду используется тот факт, что при целых $a>b$ и n, делящемся на k, a^n-b^n делится на a^k-b^k.)
1) Попытаемся найти такое p, что $3^{p-1}-2^{p-1}$ делится на p^2. Число $n=p^2$ окажется искомым. В самом деле, $3^{p^2-1}-2^{p^2-1}=\left(3^{p-1}\right)^{p+1}-\left(2^{p-1}\right)^{p+1}$ делится на $3^{p-1}-2^{p-1}$.
При $p=23$ имеем:

$$3^{22}-2^{22}=\left(3^{11}-2^{11}\right)\left(3^{11}+2^{11}\right)=23^2\cdot 331\cdot\left(3^{11}+2^{11}\right).$$

2) **Лемма 1**. *Пусть l, k — простые числа, $l\neq k$, $3^{l-1}-2^{l-1}$ делится на k, $3^{k-1}-2^{k-1}$ делится на l. Тогда $3^{kl-1}-2^{kl-1}$ делится на kl.*
Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\left(3^{kl-1}-3^{k-1}\right)-\left(2^{kl-1}-2^{k-1}\right)$$

делится на l. Согласно МТФ, $\left(3^k\right)^l-\left(3^k\right)$ делится на l; аналогично доказывается делимость на l выражения $2^{kl-1}-2^{k-1}$.
Возьмем $l=5$, тогда $3^{l-1}-2^{l-1}=13\cdot 5$. Рассмотрим $k=13$; тогда $3^{k-1}-2^{k-1}=\left(3^6-2^6\right)\left(3^6+2^6\right)$. Но 3^3+2^3 делится на $3+2=5$. Значит, по лемме, можно взять $n=kl=65$.
Аналогично при $l=7$ и $k=19$ получаем $n=133$.
3) Ясно, что искомым является любое составное число $n=3^m-2^m$ такое, что 3^m-2^m-1 делится на m.
Эта делимость имеет место, как видно из МТФ, при любом простом m; действительно,
$3^m-2^m-1=\left(3^m-3\right)-\left(2^m-2\right)$. Следовательно, достаточно найти простое p, для которого 3^p-2^p — составное число. Положим $p=11$ (см. первое решение). Составное число получается и при $p=7$: $3^7-2^7=2059=29\cdot 71$. При (составном) $m=4$ получаем число 65, также удовлетворяющее условиям задачи (ср. со вторым решением).
Замечание 1. Нетрудно показать непосредственно, что $n=65$ — наименьшее число, удовлетворяющее условиям задачи.

Замечание 2. Идея этого решения может быть применена и к другим задачам теории чисел, связанным с вопросом: верна ли теорема, обратная к МТФ? (См. статью И.М.Яглома «Почти простые числа», «Квант» № 9, 1981.)
Наименьшее составное n такое, что $2^{n-1}-1$ делится на n, равно 341. Покажем, как можно без труда найти это число. Заметим, что лемма 1 верна, если вместо 3 и 2 взять любые натуральные числа $a>b$. Положим $a=2$, $b=1$; $l=11$, тогда, поскольку при $l=11$ имеем: $2^{10}-1=1023=33\cdot 31$ и $2^{30}-1$ делится на $2^{10}-1$, достаточно взять $k=31$, $n=lk=11\cdot 31=341$.
Существуют составные m такие, что 3^m-3 и 2^m-2 оба делятся на m. Примеры: $1105=5\cdot 13\cdot 17$; $2701=37\cdot 73$. А наименьшее составное m такое, что 3^m-3 и 2^m-2 делятся на m, — число $561=3\cdot 11\cdot 17$ — знаменито тем, что оно служит делителем $a^{561}-a$ для любого целого a.
Однако неизвестно, существует ли бесконечное число составных чисел n, являющихся делителями одновременно и 3^n-3, и 2^n-2.
Приведенные факты позволяют дать и «лобовое» решение задачи: указать составные n такие, что числа $3^{n-1}-1$ и $2^{n-1}-1$ оба делятся на n. Наименьшим из таких чисел является $n=1105$. Делимость $2^{1104}-1$ на 5, 13 и 17 легко доказывается непосредственно, а делимость $3^{1104}-1$ на эти числа — с помощью МТФ.
Перейдем теперь к решению б). Оказывается, для этого достаточно развить идею, использованную выше в третьем решении пункта а): взять $n=3^{2^t}-2^{2^t}$, где $t\geq 2$. Очевидно, числа n составные. Для доказательства делимости достаточно доказать, что $n-1$ делится на 2^t, или что $3^{2^t}-1$ делится на 2^t.
Лемма 2. *При всех натуральных t число $3^{2^t}-1$ делится на 2^{t+2}.*
Докажем это по индукции.
При $t=1$ утверждение очевидно; пусть оно верно при $t=l$. Имеем: $3^{2^{l+1}}-1=\left(3^{2^l}+1\right)\left(3^{2^l}-1\right)$. Первый сомножитель делится на 2, второй на 2^{l+2}. Утверждение доказано.
Совершенно аналогично доказывается, что можно взять также $n=3^{3^t}-2^{3^t}$, где $t\geq 2$ (поскольку при всех целых $t\geq 0$ число $2^{3^t}+1$ делится на 3^{t+1}).

В.Сендеров

Ф1518. *На гладкой горизонтальной плоскости стоит вертикальный столб радиусом R. При помощи длинной тонкой нити длиной L к столбу привязана маленькая шайба. Вначале шайба лежит на плоскости, и нить натянута. Шайбе придают толчком скорость v_0 перпендикулярно нити, и она начинает двигаться вокруг столба, наматывая на него нить. Трения нет. Нить привязана к столбу внизу — около поверхности, по которой скользит шайба (рис.1). Через какое время вся нить намотается на столб?*

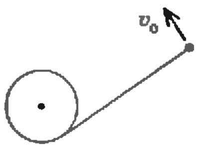


Рис.1

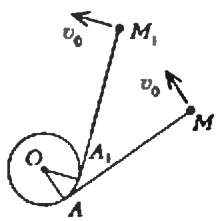


Рис.2

Скорость движения шайбы по модулю меняться не должна — никаких сил, которые могли бы совершить работу и увеличить кинетическую энергию шайбы, тут нет. Найдем зависимость изменения длины нити от времени. Углы $\Delta\varphi$ между радиусами OA и OA_1 и между отрезками AM и A_1M_1 одинаковы (рис.2). Для малого промежутка времени можно записать

$$v_0\Delta t = l\Delta\varphi \text{ и } R\Delta\varphi = \Delta l,$$

откуда следует

$$Rv_0\Delta t = l\Delta l.$$

Суммируя обе части равенства, получаем

$$Rv_0\sum \Delta t_i = \sum l_i\Delta l_i, \text{ или } Rv_0\tau = \frac{l^2}{2}.$$

Таким образом, вся нить намотается на столб за время

$$\tau = \frac{l^2}{2Rv_0}.$$

А.Зильберман

Ф1519. *На шероховатом горизонтальном столе находится куб массой M, к которому прикреплен блок (рис.1). Через блок перекинута легкая нерастяжимая нить. К нити подвешен груз массой m — в состоянии*

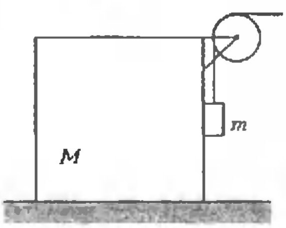


Рис.1

покоя он касается стенки куба, а участок нити, привязанный к грузу, вертикален. За свободный конец нити тянут в горизонтальном направлении, прикладывая силу F. При какой величине этой силы ускорение куба по горизонтали составит a? Коэффициент трения между кубом и плоскостью, а также между стенкой куба и грузом равен μ.

Рассмотрим случай, когда груз едет вверх (рис.2), при этом его вертикальное ускорение b для нашего решения несущественно. Груз движется вверх (при нулевой начальной скорости), если

$$F \ge mg + F_{тр1}.$$

По горизонтали на груз действует только сила реакции N, поэтому

$$N = ma.$$

Для силы трения справедливо соотношение

$$F_{тр1} = \mu N.$$

Тогда условием движения груза вверх будет

$$F \ge mg + \mu ma.$$

Для куба (рис.3) можно записать такие равенства:

$$F - N - F_{тр2} = Ma,$$

$$F_{тр2} = \mu Q,$$

$$Q + F_{тр1} - Mg - F = 0.$$

Отсюда находим

$$F = \frac{(M + m - \mu^2 m)a + \mu Mg}{1-\mu}.$$

Если сила F мала, то груз либо будет ехать без проскальзывания относительно куба, либо будет скользить вниз. В последнем случае нужно будет изменить направление силы трения на противоположное, а случай движения куба и груза как единого целого совсем несложный. Во всех случаях нужно исследовать условия движения (типа: при каких отношениях m/M возможно движение груза вниз хотя бы при какой-нибудь величине силы F) — это очень нудное, хотя и полезное занятие. Желаю успехов.

А.Сашин

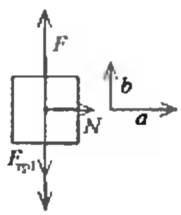


Рис.2

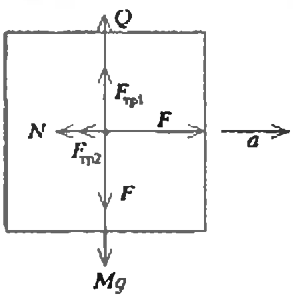


Рис.3

Ф1520. *На гладком горизонтальном столе лежит гантелька, состоящая из двух маленьких шариков, массы которых M и $M/2$, скрепленных жестким невесомым стержнем. Еще один маленький шарик массой M движется по столу перпендикулярно гантельке и налетает на шарик M гантельки точно «в лоб». Происходит абсолютно упругий удар. Как движется гантелька после удара? Произойдет ли еще хотя бы один удар шарика и гантельки? Пусть теперь налетающий шарик имеет массу m. При каких соотношениях между m и M произойдет второй удар?*

Пусть налетающий шарик имеет массу m и перед ударом движется вправо со скоростью v (рис.1). Обозначим его

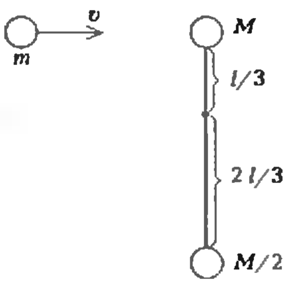


Рис.1

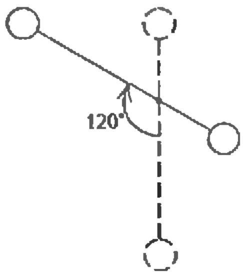


Рис.2

скорость после удара u_1, а скорость столкнувшегося с ним шарика гантельки — u_2 (второй шарик гантельки в этом ударе участия не принимает). Тогда

$$mv = mu_1 + Mu_2,\ \frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2},$$

или, обозначив $M/m = \gamma$,

$$v - u_1 = \gamma u_2,\ v^2 - u_1^2 = \gamma u_2^2.$$

Отсюда

$$u_1 = v\frac{1-\gamma}{1+\gamma},\ u_2 = v\frac{2}{1+\gamma}.$$

Центр масс гантельки после удара летит вправо со скоростью

$$u = \frac{Mu_2}{M+M/2} = \frac{2}{3}v\frac{2}{1+\gamma} = \frac{4v}{3(1+\gamma)}.$$

Кроме того, есть вращение относительно центра масс с угловой скоростью

$$\omega = \frac{u_2 - u}{l/3} = \frac{2v}{l(1+\gamma)}.$$

Для ответа на следующие вопросы перейдем в систему отсчета, которая едет вместе с центром масс гантельки — в ней гантелька просто вращается. Из геометрии (рис.2) ясно, что угол поворота до «критического» положения, когда может произойти второй удар, составляет 120°, т.е. время между ударами равно

$$\tau = \frac{2\pi/3}{\omega} = \frac{\pi l(1+\gamma)}{3v}.$$

Скорость налетавшего шарика в этой системе отсчета равна

$$u_1 - u = \frac{v(1-\gamma)}{1+\gamma} - \frac{4v}{3(1+\gamma)} = -v\frac{\gamma+1/3}{1+\gamma}.$$

Если

$$v\frac{\gamma+1/3}{1+\gamma}\cdot\frac{\pi l(1+\gamma)}{3v} = l\frac{\pi(\gamma+1/3)}{3} > \frac{2}{3}l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

то удара нет. Таким образом, второго удара не будет при

$$\gamma > \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3} = 0{,}22.$$

Ясно, что при $m = M$ (как в первой части условия) удара заведомо не произойдет.

З.Рафаилов

Ф1521. *Сосуд Дьюара содержит жидкий гелий-4. Из-за несовершенства теплоизоляции снаружи в дьюар «натекает» тепло — его мощность $N = 30$ мкВт. Для поддержания температуры гелия постоянной производится непрерывная откачка паров насосом, присоединенным к сосуду широкой трубкой длиной $l = 1$ м. Температура паров на выходе трубки (у входного отверстия насоса) практически комнатная. Сколько литров пара в минуту должен откачивать насос, чтобы поддерживать в сосуде температуру $T_1 = 1$ К? Во сколько раз нужно повысить производительность насоса, чтобы поддерживать температуру $T_2 = 0{,}5$ К? Давление насыщенных паров гелия при 1 К составляет $p_1 = 16$ Па, при 0,5 К — $p_2 = 2{,}2\cdot10^{-3}$ Па. Теплота испарения гелия $r = 92$ Дж/моль, диаметр молекулы гелия $d = 2\cdot10^{-10}$ м, масса 1 моля гелия $M = 4$ г/моль.*

Оценим длину свободного пробега для насыщенных паров в обоих случаях (для обеих температур):

$$l = \frac{1}{\pi d^2 n} = \frac{kT}{\pi d^2 p},\ l_1 \approx 7\cdot10^{-6}\ \text{м},\ l_2 \approx 0{,}03\ \text{м}$$

(здесь n — концентрация молекул, k — постоянная Больцмана). В первом случае газ не слишком разрежен, поэтому давление в трубке можно считать во всех местах одинаковым. Тогда испаряющийся за одну минуту гелий займет при комнатной температуре $T_к = 300$ К объем

$$V = \frac{\nu RT_к}{p} = \frac{60N}{r}\frac{RT_к}{p_1} = 3\cdot10^{-3}\ \text{м}^3/\text{мин}.$$

Если бы условия откачки при температуре T_2 были теми же, откачиваемый объем пришлось бы увеличить в $(p_1/p_2)(T_2/T_1) = 4000$ раз. Однако при длине свободного пробега l_2 газ ведет себя как очень разреженный, поэтому давление в месте откачки получится иным. Его можно оценить из условия равенства потоков молекул:

$$n_2v_2 = n_кv_к,\ \text{или}\ \frac{n_2}{n_к} = \frac{v_к}{v_2} = \sqrt{\frac{T_к}{T_2}},$$

откуда

$$\frac{p_2}{p_к} = \frac{n_2T_2}{n_кT_к} = \sqrt{\frac{T_2}{T_к}},$$

т.е. давление откачиваемого газа равно

$$p_к = p_2\sqrt{\frac{T_к}{T_2}} = 25p_2.$$

Таким образом, откачиваемый объем придется еще увеличить. В общем, это не получится.

С.Джосюк

Ф1522. *Вертикальный теплоизолированный сосуд закрыт тяжелым подвижным поршнем массой M. На поршень сверху помещена гиря массой m, под поршнем находится некоторое количество кислорода при температуре T_0. Гирю снимают и ожидают некоторое время — пока поршень полностью не остановится. После этого ее аккуратно ставят на поршень. Найдите высоту, на которой поршень окончательно остановится. Начальное положение равновесия поршня с гирей находится на высоте H над дном сосуда. Поршень движется без трения, теплоемкостью поршня и стенок пренебречь, наружное давление не учитывать.*

При нарушении условия равновесия поршень начинает совершать колебания. Энергия этих колебаний будет передана газу в процессе установления равновесия, поэтому уравнением адиабатического процесса здесь пользоваться нельзя.

После того как мы убрали гирю, поршень поднимется и остановится в новом положении равновесия на высоте h_1, поэтому можно записать уравнения состояния газа в виде

$$\frac{(M+m)g}{S}SH = \nu RT_0,\ \frac{Mg}{S}Sh_1 = \nu RT_1,$$

где S — площадь сечения сосуда, T_1 — новая температура газа. Кислород — двухатомный газ, следовательно, закон сохранения энергии будет выглядеть так:

$$Mg(h_1 - H) = \frac{5}{2}\nu R(T_0 - T_1).$$

Полученную систему из трех уравнений легко решить:

$$h_1 = H\left(1 + \frac{5}{7}\frac{m}{M}\right).$$

После того как мы снова поставили гирю на поршень, новое положение равновесия на высоте h_2 определится из соотношений

$$(M+m)gh_2 = \nu RT_2,\ Mgh_1 = \nu RT_1,$$

$$(M+m)g(h_1-h_2) = \frac{5}{2}\nu R(T_2-T_1).$$

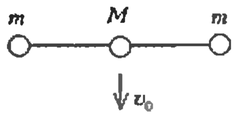
Отсюда

$$h_2 = h_1\frac{1+\frac{2}{7}\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}} = H\frac{\left(1+\frac{5}{7}\frac{m}{M}\right)\left(1+\frac{2}{7}\frac{m}{M}\right)}{1+\frac{m}{M}}.$$

Напомним, что над системой совершили работу внешние силы — гирю мы убрали на высоте H, а обратно поставили на высоте h_1.

А.Зильберман

Ф1523. *Три маленьких шарика, массы которых m, M и m, заряжены одинаковыми зарядами Q (см. рисунок).*



Средний шарик, массой M, привязан к двум другим кусочками легкой нерастяжимой нити длиной l каждый. Система лежит на гладком горизонтальном столе. Среднему шарику толчком придают скорость v_0 в направлении, перпендикулярном к нити. Каким будет наименьшее расстояние между шариками m в процессе движения? Какой может быть скорость шарика M в те моменты, когда все шарики снова оказываются на одной прямой?

В тот момент, когда шарики m находятся на минимальном расстоянии друг от друга, все три шарика будут двигаться с одинаковыми скоростями v:

$$Mv_0 = (M+2m)v,\ v = v_0\frac{M}{M+2m}.$$

Расстояния между шариками m и средним шариком не изменяются, значит, меняется только энергия взаимодействия между крайними шариками. Если обозначить минимальное расстояние между ними через x, то можно записать

$$\frac{kQ^2}{x} - \frac{kQ^2}{2l} = \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{(M+2m)v^2}{2},$$

откуда, с учетом полученного выражения для скорости v, найдем

$$x = \frac{1}{\frac{1}{2l} + \frac{Mmv_0^2}{kQ^2(M+2m)}}.$$

Скорость среднего шарика в тот момент, когда все шарики снова окажутся на одной прямой, определяется из простой системы механических уравнений (энергия электростатического взаимодействия не изменилась по сравнению с начальной):

$$Mv_0 = Mu_1 + 2mu_2,\ \frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mu_1^2}{2} + 2\frac{mu_2^2}{2}.$$

Система такая же, как при расчете абсолютно упругого удара. У этой системы два решения, поскольку одно из уравнений квадратное. Выпишем их:

$$u_1 = v_0,\ u_1 = 0$$

и

$$u_1 = v_0\frac{1-\frac{M}{2m}}{1+\frac{M}{2m}},\ u_2 = v_0\frac{2}{1+\frac{M}{2m}}.$$

Поочередно реализуются оба решения.

Р.Александров

Ф1524. *Вольт-амперная характеристика лампочки накаливания приведена на рисунке 1 (при напряжениях больше 3 В лампочка перегорает). Из двух лампочек и двух резисторов сопротивлением 10 Ом каждый собирают схему, показанную на рисунке 2. Между точками А и Б подключают источник питания и начинают плавно увеличивать его напряжение. Между точками В и Г подключают вольтметр и фиксируют его показания. Нарисуйте график зависимости напряжения вольтметра от напряжения источника. При каком напряжении источника лампочки могут перегореть? Сопротивление вольтметра велико.*

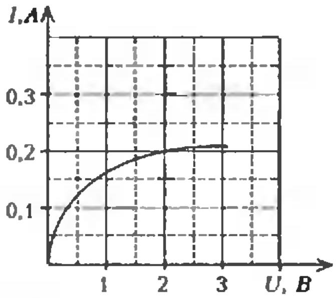


Рис.1

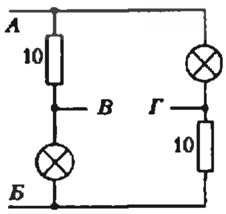


Рис.2

Нарисуем на одном графике вольт-амперные характеристики лампы и резистора сопротивлением 10 Ом (рис.3). Сумма напряжений лампы и резистора при

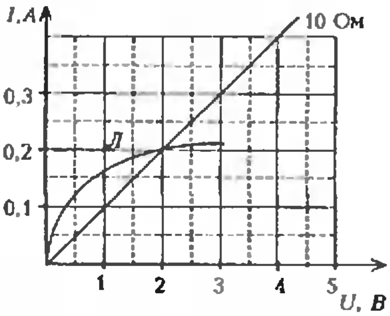


Рис.3

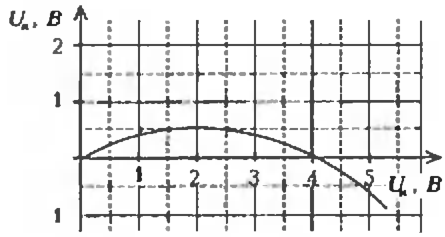


Рис.4

любом значении тока цепочки дает напряжение источника. Построим теперь искомый графики по точкам (рис.4) — задавая значения тока цепочки, найдем для каждого такого значения сумму напряжений лампочки и резистора (это будет напряжение источника $U_и$) и разность напряжений (показания вольтметра $U_в$). Пример: ток 0,1 А дает суммарное напряжение $U_и$ = 1,5 В, а разностное $U_в$ = 0,5 В, ток 0,2 А дает $U_и$ = 4 В, $U_в$ = 0 и т.д. Видно, что току «перегорания» 0,21 А соответствует напряжение источника чуть больше 5 В — примерно 5,2 В.

А.Зильберман

Ф1525. *Вольт-амперная характеристика диода в прямом направлении изображена на рисунке 1, в обратную сторону диод совершенно не проводит. Собрана схема из двух резисторов сопротивлением по 500 Ом и четырех диодов (рис.2). К точкам А и Б схемы подключают выход источника переменного (синусоидального) напряжения. Нарисуйте график зависимости от времени напряжения, измеренного между точками В и Г. Рассмотрите три случая — амплитудные значения переменного напряжения источника равны 1 В, 2 В и 2,5 В.*

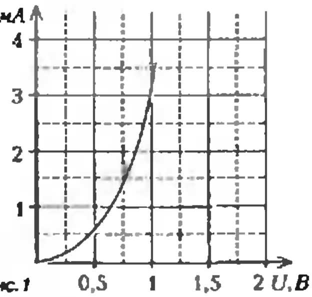


Рис.1

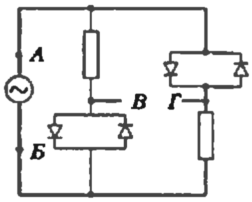


Рис.2

Начало решения этой задачи очень похоже на решение предыдущей задачи — построим зависимость напряжения между точками *В* и *Г* от входного напряжения, приложенного к точкам *А* и *Б* (рис.3 и 4). Остальное понятно из рисунков 5, 6 и 7 (для амплитудного значения напряжения источника 2 В сделайте рисунок самостоятельно).

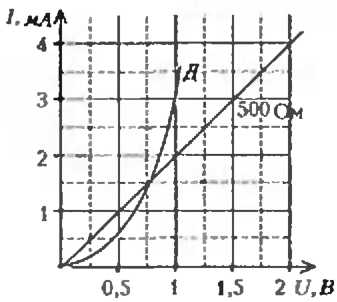


Рис.3

А.Зильберман

Ф1526. *К батарейке напряжением U_0 подключены последовательно соединенные конденсаторы емкостью С и 2С (до подключения конденсаторы не были заряжены).*

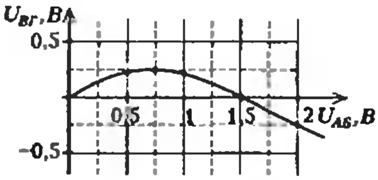


Рис.4

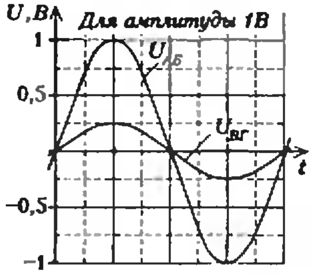


Рис.5

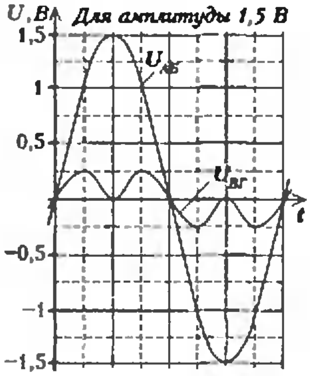


Рис.6

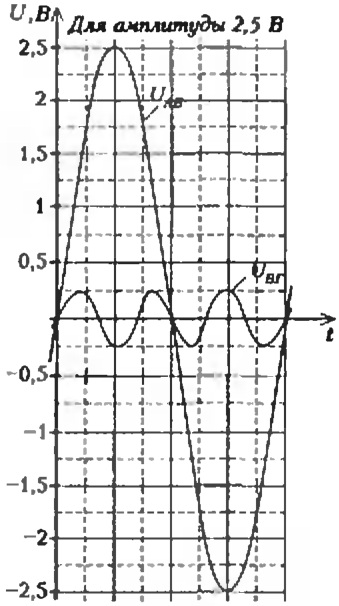


Рис.7

(Продолжение см. на с. 34)

Земля постоянно движется, но люди этого не знают; они, как команда на закрытом судне, этого не замечают.

Лося Хун, II — I вв. до н.э.

*В море из порта идем
и отходят
и земли, и грады.*

Вергилий, I в. до н.э.

*I. Земля находится в центре Вселенной.
II. Земля неподвижна.
III. Все небесные тела движутся вокруг Земли...*

Постулаты Птолемея, II в.

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМА ВАМ

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ?

Как видите, понятие относительности будоражило умы и китайских астрономов, и римских поэтов, и выдающихся естествоиспытателей многих стран. Оно волновало и в древности, и в средние века, и сегодня. Касается оно как самых привычных, обыденных, земных явлений, так и вопросов, связанных с устройством нашего мира в целом. Более того, возникнув при попытках описания простейших видов движения, оно «проросло» в самые фундаментальные проблемы современной науки, заставив пересмотреть многие, казалось бы, незыблемые ее положения. Можно смело сказать, что относительность красной нитью проходит через всю историю физики. А таких понятий, согласитесь, немного.

Что ж, попробуем проверить, насколько это понятие уже укоренилось в вашем сознании.

Вопросы и задачи

1. Так все-таки что же движется: Земля вокруг Солнца или Солнце вокруг Земли?

2. Какую форму имеет траектория центра Луны?

3. Какова траектория движения точек винта самолета по отношению: а) к летчику; б) к земле?

4. На рисунке показана траектория капли дождя на окне вагона поезда. Можно ли сказать, куда движется поезд?

5. Камень, брошенный вертикально вверх, первую половину пути движется замедленно, а вторую — ускоренно. Означает ли это, что в первом случае его ускорение отрицательно, а во втором — положительно?

6. Из труб идет дым. Подхваченный ветром, он тянется длинным шлейфом от каждой трубы. Могут ли два дымовых шлейфа пересекаться?

7. В каком случае летчик реактивного самолета может рассмотреть пролетающий недалеко от него артиллерийский снаряд?

8. Эскалатор метро движется вверх со скоростью 0,75 м/с. С какой скоростью должен передвигаться по нему пассажир, чтобы опускаться вниз со скоростью пассажиров, неподвижно стоящих на встречном эскалаторе?

9. Мяч бросили вертикально вверх со скоростью v_0. Когда он достиг высшей точки подъема, из того же начального пункта с той же начальной скоростью бросили вверх второй мяч. Какова скорость мячей друг относительно друга?

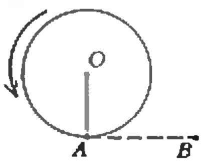
10. Могут ли две точки A и B двигаться в одной системе отсчета по параллельным прямым, а во второй — по пересекающимся?

11. По реке плывут рядом с одной и той же скоростью плот и лодка. Что потребует от гребца лодки меньших усилий: отстать от плота на 15 метров или обогнать его на 15 метров?

12. Почему самолеты почти всегда взлетают и садятся на взлетную полосу против ветра?

13. Самолет летит по замкнутому маршруту Москва — Курск — Москва на побитие рекорда скорости. В течение всего полета дует постоянный ветер по направлению Москва — Курск. Улучшится или ухудшится рекорд из-за ветра?

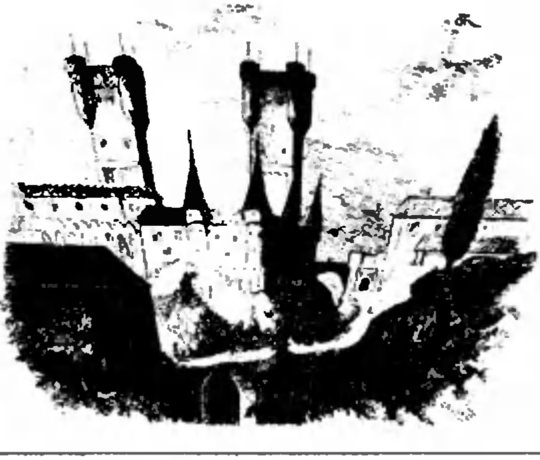
14. Круглая горизонтальная платформа вращается вокруг своей оси, как показано на рисунке. На платформе стоит наблюдатель A, на земле — наблюдатель B, причем OB вдвое больше OA. В момент, когда наблюдатель A занимает указанное положение, он движется на наблюдателя B со скоростью 1 м/с. С какой скоростью движется в этот момент наблюдатель B относительно наблюдателя A?



15. Мальчик стреляет из пневматического ружья, находясь на платформе поезда, движущегося со скоростью 30 м/с. Скорость вылета пули из ружья также 30 м/с. Будет ли пуля обладать кинетической энергией?

16. Груз, висящий на длинной нити (отвес), притягивается не только к Земле, но и к Солнцу. Не должен ли он утром слегка отклоняться к востоку, а вечером — к западу?

17. При движении друг относительно друга двух расчесок с различной частотой зубьев можно наблюдать не-



... сотни раз, сидя в своей каюте, я спрашивал себя, движется корабль или стоит неподвижно. Иногда... я полагал, что корабль движется в одном направлении, тогда как движение его шло в сторону противоположную.

Галилео Галилей, XVI—XVII вв.

Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.

Исаак Ньютон, XVII—XVIII вв.

Два события, одновременные при наблюдении из одной координатной системы, уже не воспринимаются как одновременные при рассмотрении из системы, движущейся относительно данной системы.

Альберт Эйнштейн, XX в.

... если мы сообщим Земле какое-нибудь движение, то это движение обнаружится таким же и во всем, что находится вне Земли, но только в противоположную сторону, как бы проходящим мимо...

Николай Коперник, XVI в.

ремещающиеся темные и светлые полосы. Способно ли это перемещение происходить со скоростью, большей скорости света?

18. Один из самых удаленных космических объектов, называемых квазарами, удаляется от Земли со скоростью, равной половине скорости света. Он испускает регистрируемый на Земле свет. Чему равна скорость этого света относительно нас?

Микроопыт

Сидя в вагоне поезда, понаблюдайте за встречным поездом. Почему сразу после его прохождения кажется, что ваше движение резко замедлилось?

Любопытно, что...

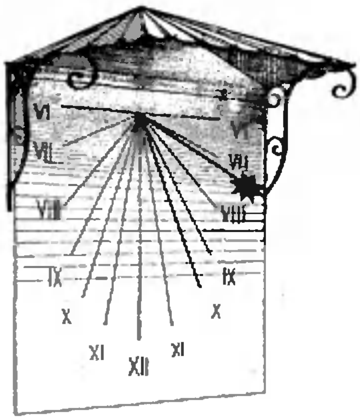
...наблюдая за светилами, сам Птолемей указывал, что суточное их движение может быть объяснено как вращением Земли, так и вращением всего «мира».

...система Коперника была революционным шагом не только по отношению к церкви (Земля и человек перестали быть центром Вселенной), но и с точки зрения механики — никогда еще относительность движения не использовалась для решения конкретных задач.

...своим классическим принципом относительности Галилей отвечал на критику перипатетиков — последователей Аристотеля. Те считали, что Земля неподвижна, поскольку летящие птицы не отстают от нее, дальность стрельбы орудий на запад не больше, чем на восток, тяжелые тела падают по вертикали, а не наклонно и т.д.

...в кабине поднимающегося с ускорением лифта горизонтальный луч света испытывает параболическое искривление, как если бы на него действовало только гравитационное поле. Это лишь один из примеров, приведших к сомнениям о всеобщности применимости евклидовой геометрии и построению теории относительности.

...согласно специальной теории относительности, угол между диагоналями квадрата, движущегося вдоль одной из своих сторон со скоростью 270000 км/с, достигает 48° за счет сокращения этой стороны.



...Лоренц, автор уравнений, положенных в основу специальной теории относительности, так и не смог воспринять основную мысль Эйнштейна об относительном характере одновременности. До конца жизни он пытался отстоять возможность существования абсолютного времени.

...поразительный пример замедления времени представляет распад космического мюона. (Мюон — отрицательно заряженная частица с массой, в 207 раз превышающей массу электрона.) Времена его жизни в собственной системе отсчета и в системе земного наблюдателя отличаются в несколько раз.

...важнейший для теории относительности опыт Майкельсона — Морли проводился с помощью оптического интерферометра. Этот прибор был настолько чувствителен, что мог обнаружить различие во времени распространения света на пути лишь в несколько метров, т.е. всего 10^{-16} с. Обратите внимание — опыт проводился в 1881 году, когда не было никакой электроники или компьютеров!

Что читать в «Кванте» об относительности

(публикации последних лет)

1. «*О машине времени и теории относительности*» — 1988, № 3, с. 44;
2. «*Относительность движения*» — 1989, № 9, с. 46;
3. «*Системы отсчета в задачах механики*» — 1990, № 2, с. 62;
4. «*Когда вокруг все вертится*» — 1992, № 9, с. 45;
5. «*Мистер Томпкинс в Стране Чудес*» — 1993, № 1/2, с. 48;
6. «*Кинематика на карусели*» — 1994, № 5, с. 41;
7. «*Простой вывод формулы $E = mc^2$*» — 1995, № 2, с. 10;
8. «*Парадоксы постоянного магнитного поля*» — 1995, № 3, с. 36;
9. «*Звездная аберрация и теория относительности*» — 1995, № 4, с. 10;
10. «*Разгон торможением*» — 1995, № 6, с. 46.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 22)

Параллельно конденсатору 2C в некоторый момент присоединяют цепочку из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и батарейки напряжением $3U_0$ (рис.1). Найдите максимальное значение тока через катушку и максимальное напряжение на конденсаторе 2C. Сколько всего тепла выделится в системе с момента подключения катушки с батарейкой? «Минусовые» выводы батареек соединены между собой.

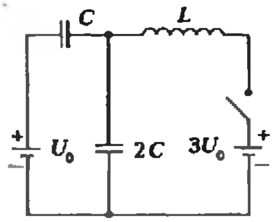


Рис.1

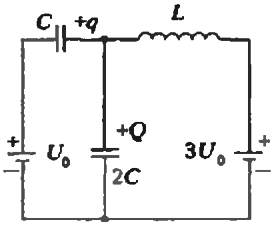


Рис.2

В тот момент, когда ток через катушку максимален, ЭДС индукции равна нулю, значит, напряжение конденсатора 2C равно $3U_0$, а напряжение конденсатора C равно $2U_0$. Запишем закон сохранения энергии с учетом работы батареек:

$$W_н + A_б = W_к,\ W_н = \frac{2}{3}C\frac{U_0^2}{2},$$

$$W_к = C\frac{(2U_0)^2}{2} + 2C\frac{(3U_0)^2}{2} + L\frac{I_m^2}{2},$$

$$A_б = U_0\left(-C\cdot 2U_0 - \frac{2}{3}C\cdot U_0\right) + 3U_0(2C\cdot 3U_0 + C\cdot 2U_0).$$

Решая эти уравнения, получаем

$$I_m = U_0\sqrt{\frac{64C}{3L}}.$$

При максимальном заряде конденсатора 2C заряд конденсатора C минимален (сумма их напряжений постоянна и равна U_0). Следовательно, в этот момент токи в цепи конденсаторов равны нулю, а значит, и ток катушки тоже равен нулю. Обозначим заряды конденсаторов Q и q (рис.2). Тогда можно записать

$$\frac{Q}{2C} - \frac{q}{C} = U_0.$$

Из закона сохранения энергии с учетом работы батареек получаем

$$U_0\left(-q - \frac{2}{3}CU_0\right) + 3U_0(Q+q) + \frac{2}{3}C\frac{U_0^2}{2} = \frac{Q^2}{4C} + \frac{q^2}{2C}.$$

Решая систему двух последних уравнений, находим

$$Q = \frac{18 \pm 16}{3}CU_0.$$

Итак, максимальное напряжение на конденсаторе 2C равно

$$U_m = \frac{17}{3}U_0.$$

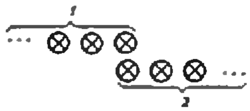
В конце концов колебания в цепи прекратятся, и напряжения конденсаторов составят $3U_0$ и $2U_0$ (как в самом первом случае). Следовательно, в тепло перейдет энергия, равная максимальной энергии катушки:

$$W_т = \frac{32CU_0^2}{3}.$$

З.Рафаилов

Ф1527. *Длинный узкий коридор освещается длинным рядом одинаковых ламп, висящих у потолка на одинаковых расстояниях друг от друга. В одной половине коридора лампы горят, в другой половине кто-то их вывинтил и унес (не горят). В той части коридора, где лампы горят, освещенность на полу изменяется от максимального значения I_0 точно под лампой до $I_1 = 0,96I_0$ посредине между лампами (освещенность измеряется на полу вдоль серединной оси, вдали от концов гирлянды ламп). Отражения света от стен и потолка нет. Освещенность точно под крайней лампой составляет $0,6I_0$. а) Найдите максимальную освещенность на полу в том случае, когда останется только одна горящая лампа. б) Какой станет максимальная освещенность на полу, если поставить горящие лампы вдвое чаще? Чему будет в этом случае равна освещенность в точках пола между горящими лампами? в) Какой стала бы максимальная освещенность при увеличении вдвое расстояния между лампами и полом?*

а) Найдем освещенность, создаваемую одной лампой. Воспользуемся тем, что точно под крайней лампой освещенность составляет $0,6I_0$, добавим вторую «полубесконечную» гирлянду 2 (нарисуем ее условно ниже, хотя в нашем мысленном эксперименте лампы могут и совпадать в одной точке). Ясно, что освещенность увеличится при этом в 2 раза и составит $1,2I_0$. С другой стороны, отличие от I_0 как раз и составляет вклад одной лампы, которая обеспечивает $0,2I_0$.



б) Когда лампы расположены вдвое чаще, максимальная освещенность будет вдали от края гирлянды точно под какой-нибудь лампой. Но полученная конфигурация состоит из двух исходных гирлянд, сдвинутых одна относительно другой. Тогда максимальная освещенность составит

$$I_0 + 0,96I_0 = 1,96I_0.$$

Рассчитать красиво освещенность в точке пола между лампами никак не получается, ну и не надо. Разница между I_0 и $0,96I_0$ совсем невелика, можно приближенно посчитать «среднее»: $0,98I_0$, тогда получим

$$0,98(I_0 + 0,96I_0) \approx 1,92I_0.$$

Впрочем, это спорное утверждение — оценку можно попробовать уточнить (сделайте это сами).

в) Из конфигурации «вдвое чаще» легко получить конфигурацию «вдвое выше» — из точки наблюдения нужно увеличить ровно в 2 раза расстояние до каждой из ламп, при этом все вклады в освещенность упадут в 4 раза и получится ответ:

$$\frac{1,96I_0}{4} = 0,49I_0.$$

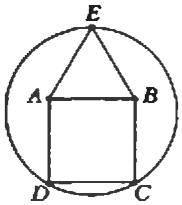
О.Шпырко

Задачи

1. У крестьянина были коза, корова и кобыла, а еще стог сена. Сын крестьянина подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу 1 месяц, или козу и корову 3/4 месяца, или же корову и кобылу 1/3 месяца. В ответ на это отец заметил, что сын плохо учился в школе. Прав ли он?

Г.Кукин

2. На стороне AB квадрата $ABCD$ вне него построен равносторонний треугольник ABE. Чему равен радиус окружности, проходящей через точки C, D и E, если длина стороны квадрата равна a?



А.Савин

3. Разъезжаясь на зимние каникулы, 19 друзей-студентов дали обещание писать друг другу письма. Каждый отправил из дома друзьям 2 или 4 письма. Может ли случиться, что каждый из них получит ровно по три письма?

С.Токарев

4. Укажите на плоскости шесть точек, каждые пять из которых можно покрыть двумя квадратами с длинами диагоналей по 1, но все шесть нельзя покрыть двумя кругами с диаметрами по 1.

В.Произволов

5. 100 чиновников министерства были приглашены на совещание. Кресла были расставлены в виде прямоугольника в 10 рядов по 10 кресел. Начало совещания задерживалось, и разместившиеся в креслах чиновники стали обмениваться со своими соседями сведениями об их зарплатах. Те чиновники, которые убедились, что из всех их соседей слева, справа, спереди, сзади и по диагоналям не более одного человека получает бо́льшую зарплату, стали считать себя высокооплачиваемыми. Какое наибольшее число чиновников могло считать себя высокооплачиваемыми?

А.Шаповалов

Конкурс «Математика 6–8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6 — 8 классов. Конкурс состоит из 20 задач (по 5 в каждом номере журнала, начиная с пятого номера 1995г.) и заканчивается во втором номере этого года. Победители будут награждены премиями журнала «Квант»; победители конкурса и лучшие математические кружки из принявших участие в этом конкурсе будут приглашены в летнюю математическую школу.

Решение задач из этого номера высылайте не позже 1 апреля 1996 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский пр., 64а, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6 – 8»). Не забудьте указать фамилию, имя и класс.

11. Во время длительного полета некоторые члены экипажа космического корабля поссорились и перестали разговаривать друг с другом. В таблице (рис. 1) цифрой 1 обозначено, что данные люди еще не поссорились, а 0 означает, что они не разговаривают друг с другом. Радист А узнал некоторую новость о событиях на Земле и сообщил ее одному из тех, кто с ним разговаривает (т.е. Г или Ж), тот еще одному и т.д. Последним узнал новость Е. Каким путем пришла к нему эта новость?

А.Савин

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И
А	–	0	0	1	0	0	1	0	0
Б	0	–	1	1	1	1	1	1	1
В	0	1	–	0	0	0	1	1	0
Г	1	1	0	–	1	0	1	0	1
Д	0	1	0	1	–	0	1	0	1
Е	0	1	0	0	0	–	0	0	1
Ж	1	1	1	1	1	0	–	0	0
З	0	1	1	0	0	0	0	–	0
И	0	1	0	1	1	1	0	0	–

Рис. 1

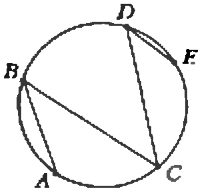


Рис 2

12. У ломаной $ABCDE$ все вершины лежат на окружности (рис. 2). Углы в вершинах B, C и D равны по 45°. Докажите, что $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

В.Произволов

13. Поля шахматной доски занумерованы, как показано на рисунке 3. Расставьте на этой доске несколько ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу, а сумма номеров полей, на которых они стоят, была наибольшей.

И.Акулич

14. Докажите, что для любого целого числа k, большего 2, найдется k различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из этих чисел делится на разность этих двух чисел.

Л.Курляндчик

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57

Рис.3

15. Натуральные числа a, b и c таковы, что

$$ab + bc = ca.$$

Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и c равен сумме наибольшего общего делителя чисел a и b с наибольшим общим делителем чисел b и c.

В.Произволов

«Разутый философ», или Две теории электричества XVIII века

Л.КРЫЖАНОВСКИЙ

Предметом научных исследований порой становятся совершенно неожиданные вещи. У Роберта Симмера (предположительно родился в Шотландии около 1707 г., умер в Лондоне в 1763 г.) таким предметом с 1758 года стали ... собственные чулки.

У ученого была странная привычка: носить одновременно две пары чулок, по одному белому (шелковому) и одному черному (шерстяному) на каждой ноге. Когда Симмер снимал чулки, сразу черный и белый с каждой ноги, то пока они оставались вместе, практически не наблюдалось никаких электрических эффектов. Но стоило разнять белый и черный чулки, как они раздувались, будто в них все еще находилась нога, и притягивались друг к другу. Будучи соединенными снова, чулки «схлопывались» и, лежа друг на друге, со временем разбухали не более чем на 2 – 3 дюйма. В сухие холодные дни ученый бросал свои раздутые чулки на стену комнаты — они прилипали к стене и совершали пируэты при дуновении. Так Симмер развлекал этими «танцами» своих ученых коллег (и даже принца Уэльского).

К тому времени было уже накоплено достаточно сведений об электричестве. Было известно, что при трении тела электризуются (иногда этому сопутствует искрение), что одни тела проводят электричество, а другие нет (еще У.Гильберт (1540 – 1603) разделил все тела на два класса в зависимости от их способности электризоваться — на «электрики» и «неэлектрики»), что существует явление электрического притяжения и отталкивания.

В 1733 году французский физик Шарль Дюфе (1698 – 1739) открыл два вида электричества — «стекольное» и «смоляное» — и установил качественный закон взаимодействия (притяжения и отталкивания) между ними.

Дюфе предложил простой способ определения вида наэлектризованности, применяемый и в настоящее время: «Для того чтобы узнать, к какому из двух классов относится тело, нужно наэлектризовать шелковую нить, которая, как известно, относится к смоляному электричеству, и заметить, притягивает или отталкивает ее это тело, если его наэлектризовать. Если притягивает, то оно, естественно, относится к тому виду электричества, которое я называю стекольным; если же, наоборот, отталкивает, то оно относится к тому же виду электричества, что и шелк, т.е. к смоляному». К сожалению, Дюфе не учел, что знак заряда (по современной терминологии) зависит не только от данного тела, но и от того тела, с которым оно участвует в процессе электризации трением.

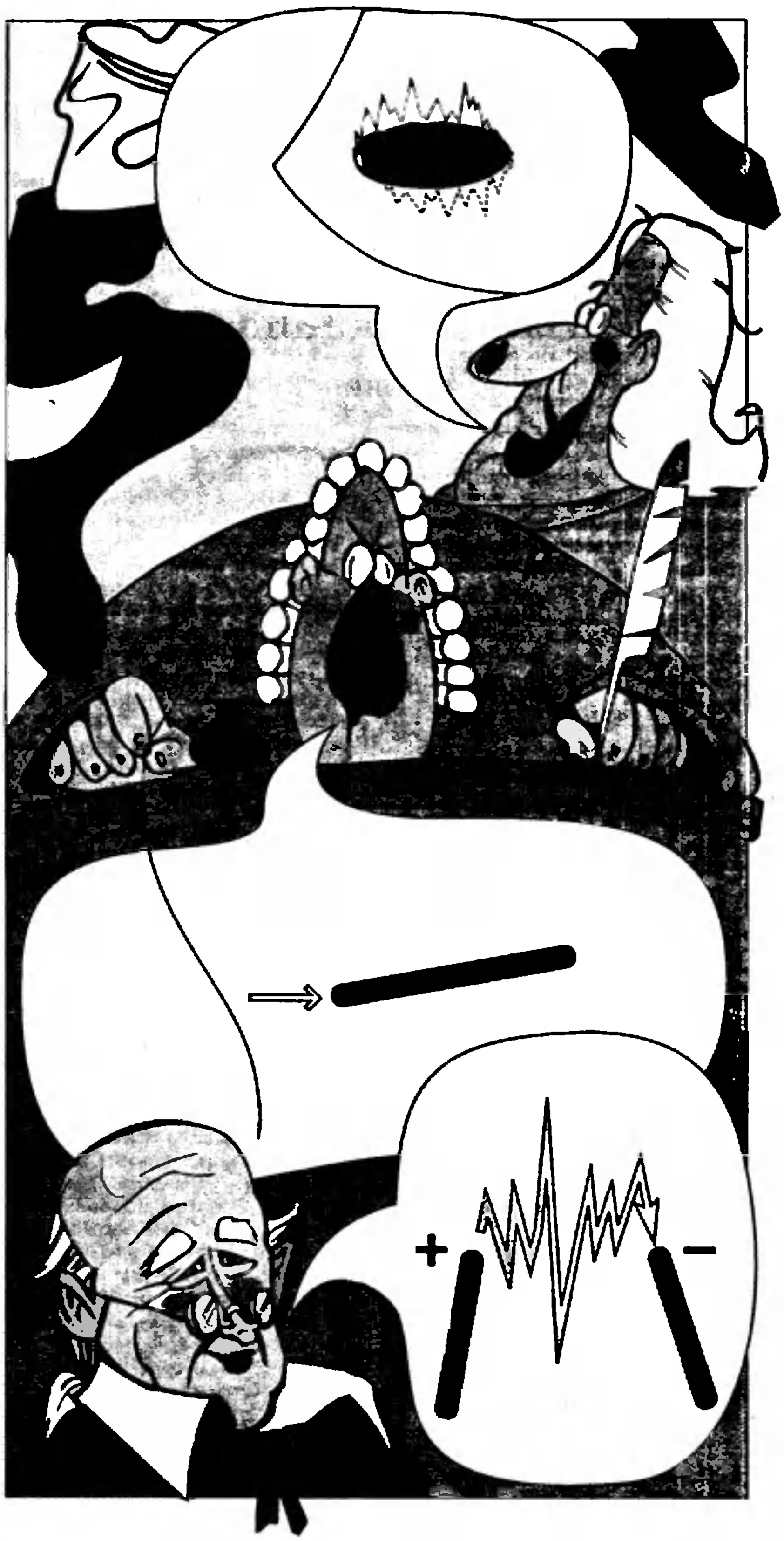
В середине XVIII века американский ученый и политик Бенджамин Франклин (1706 – 1790) выдвинул свою теорию электричества. Согласно Франклину, для объяснения электрических явлений достаточно предположить существование одного вида «электрической материи», способной легко проникать в обыкновенную материю. В одном учебнике физики, изданном в России в 1787 году, идея Франклина излагается следующим образом: «Положительно наэлектризованное тело есть то, когда оно более содержит электрической материи, нежели сколько имеет в естественном своем состоянии; напротив, отрицательно наэлектризованное тело есть то, когда оно имеет менее электрической материи, нежели сколько ему по существу надобно».

Вместо «стекольного» и «смоляного» электричества (по Дюфе) Франклин ввел понятие положительного и отрицательного зарядов. Причем знаки зарядов Франклин ввел не совсем произвольно: при наблюдении разряда между двумя проводниками Франклину казалось, что искра выходила из одного проводника и входила в другой; заряд первого проводника Франклин назвал положительным, а второго — отрицательным. Как-то Франклину показалось, что искра выходила из проводника, заряженного отрицательно, и он переименовал заряды на противоположные, но затем вернулся к своей исходной терминологии, вероятно (как и мы), считая ее условной.

А что же Симмер? Он придавал большое значение своим опытам с чулками, за что и получил в ученом мире прозвище «разутый философ». Разнообразя опыты, Симмер заряжал от чулок лейденскую банку — и ощущал электрический удар при ее разрядке; пользуясь столь нетрадиционным источником электрической энергии, воспламенял спирт; и т.п. Симмер провел аналогию между парой раздутых чулок и заряженной лейденской банкой. Но самое главное — чулки навели Симмера на мысль о существовании двух видов электричества, что в общем подтверждало точку зрения Дюфе.

В 1759 году Симмер опубликовал свою теорию, противопоставив ее теории Франклина, однако это никак не повлияло на творческие связи двух ученых. Однажды Симмер наблюдал, как Франклин (бывший в то время в Европе) осуществлял электрический пробой стопки бумаги. Исследуя эту бумагу, Симмер заметил, что одна половина рваного края каждой дырки от пробоя отогнута в одну сторону, а другая — в другую. Получалось, что с одной стороны листа волокна края каждой дырки имели одно направление, а с другой — противоположное, как будто отверстие в стопке было сделано двумя плотно прилегающими друг к другу нитями, протягиваемыми в противоположных направлениях (особенно четко это было выражено в средней части стопки). Согласитесь, это было одним из аргументов в пользу теории Симмера.

Долгое время теории Франклина и Симмера соперничали друг с другом с переменным успехом, поскольку оказалось, что многие явления одинаково хорошо объясняются как той, так и иной теорией. Спор о том, существует ли два вида электричества или один, был решен в пользу теории Симмера лишь после открытия электрона в 1897 году.



ФИЗИКА 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Почему не лежится Ваньке-Встаньке?» предназначена девятиклассника, заметка «Зачем погружать конденсатор в воду?» — десятиклассникам, «Солнце, лампа и кометы» — одиннадцатиклассникам.

Почему не лежится Ваньке-Встаньке?

Л. БОРОВИНСКИЙ

Наверное, многие из вас помнят с раннего детства или читали недавно своим младшим братишкам и сестренкам веселые стихи Самуила Яковлевича Маршака о кукле-неваляшке — Ваньке-Встаньке:

Уснули телята, уснули цыплята,
Не слышно веселых скворчат
из гнезда.
Один только мальчик —
по имени Ванька,
По прозвищу Встанька —
не спит никогда.

У Ваньки, у Встаньки —
несчастные няньки:
Начнут они Ваньку укладывать спать,
А Ванька не хочет — приляжет
и вскочит,
Уляжется снова и встанет опять.

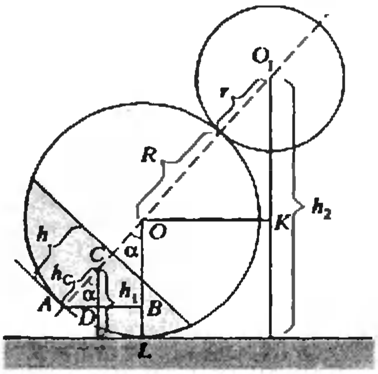
Укроют его одеялом на вате —
Во сне одеяло отбросит он прочь
И снова, как прежде, стоит на кровати,
Стоит на кровати ребенок всю ночь.

Лечил его доктор из детской
больницы.
Больному сказал он такие слова:
— Тебе, дорогой, потому не лежится,
Что слишком легка у тебя голова!

Итак, «доктор из детской больницы», по словам поэта, нашел причину странного поведения Ваньки-Встаньки. Мы же попробуем не только объяснить такое поведение с помощью законов физики, но и выяснить, при каких условиях Ванька-Встанька принимает вертикальное положение, как только прекращается действие силы, удерживающей его в любом другом положении.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 7 за 1981 год.

Как устроена кукла-неваляшка? Представьте себе две соприкасающиеся между собой сферы (см. рисунок) с радиу-



сами R и r ($R > r$). Большая сфера — это «туловище», а меньшая — «голова». (Иногда «голове» придают форму цилиндра с горизонтальной осью, но для наших рассуждений форма «головы» не играет никакой роли.) В нижней части «туловища» находится массивное тело в форме сферического сегмента высотой h. Сегмент ограничен частью поверхности «туловища» и плоскостью, перпендикулярной оси, проходящей через центры сфер и точку их соприкосновения.

Если попытаться положить куклу на горизонтальную поверхность и предоставить ее самой себе, она немедленно встанет. Почему? Очевидно, что вертикальное положение Ваньки-Встаньки является положением устойчивого равновесия. В механике есть правило: в состоянии устойчивого равновесия центр тяжести тела должен находиться в самом низком из возможных для него положений. Это означает, что значение потенциальной энергии, вызванной тяготением к Земле, должно быть наименьшим из всех возможных.

Выясним, при каких условиях потенциальная энергия Ваньки-Встаньки будет минимальной, когда он занимает вертикальное положение. Выведем куклу из положения равновесия, отклонив ее ось на угол α от вертикали. Пусть h_C — высота центра тяжести массивного тела при вертикальном положении оси, M — его масса и m — масса «головы». Масса оболочки «туловища» не имеет значения, так как высота центра тяжести оболочки, а значит, и ее потенциальная энергия при наклоне Ваньки-Встаньки не изменяются.

Как видно из рисунка, высота центра тяжести массивного тела при наклоне оси равна

$$h_1 = CD + BL = h_C\cos\alpha + R - R\cos\alpha,$$

а высота центра тяжести «головы» —

$$h_2 = LO + KO_1 = R + (R + r)\cos\alpha.$$

Общая потенциальная энергия массивного тела и «головы» равна

$$E_p = Mgh_1 + mgh_2 = (M + m)gR +$$
$$+(m(R + r) - M(R - h_C))g\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия Ваньки-Встаньки при вертикальном положении оси, т.е. при $\alpha = 0$, будет минимальной, если выражение, на которое умножается $g\cos\alpha$, отрицательно:

$$m(R + r) - M(R - h_C) < 0,$$

или

$$m < M\frac{R - h_C}{R + r}.$$

Осталась, правда, неизвестной величина h_C, но ее можно выразить через известные величины R и h (примем это без доказательства):

$$h_C = h\frac{8R - 3h}{12R - 4h}.$$

Таким образом, мы нашли точное математическое условие, показывающее, в какой мере должна быть «легка голова» у Ваньки-Встаньки, чтобы он принимал вертикальное положение, как только будет предоставлен самому себе.

Зачем погружать конденсатор в воду?

А. СТАСЕНКО

«Жил-был плоский конденсатор. Его совершенно плоские пластины площадью l^2 были строго параллельны, отстояли друг от друга на расстояние d и были подключены к батарее с разностью потенциалов U. И было в нем совершенно однородное электрическое поле с модулем напряженности $E_0 = U/d$, перпендикулярное его пластинам...»

Да, но ведь это сказка! В реальности пластины имеют конечные размеры и, следовательно, края. Выясним, как выглядит поле у краев этого плоского конденсатора.

Может ли оно иметь вид, изображенный на рисунке 1,*а*, т.е. быть равным E_0 внутри и резко обрываться до нуля сразу за его пределами? Предположим, что это

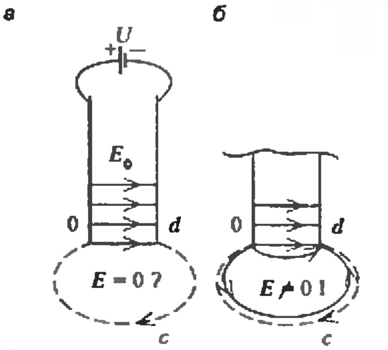


Рис. 1

так. Тогда возьмем какой-нибудь положительный заряд q и пронесем его по замкнутому контуру $0dc0$. На участке $0d$ поле совершит работу $qE_0d = qU$, а на участке $dc0$ при этом перемещении никакой работы не будет, так как по нашему предположению там $E = 0$. В результате при перемещении по выбранному контуру мы получим от поля работу, равную qU. Мы можем совершать такие циклы много раз в секунду и получим совершенно бесплатный источник энергии — вечный двигатель, что запрещено. Значит, что-то не так. Работа по замкнутому контуру должна быть равна нулю. Следовательно, должно быть поле и на участке $dc0$, причем такое, чтобы дать работу, в точности равную $-qU$, т.е. противоположную по знаку работе на участке $0d$. Правда, судя по рисунку, участок $dc0$ длиннее $0d$, и поэтому напряженность поля на этом участке в среднем должна быть меньше, чем внутри конденсатора, но не равной нулю. Эти рассуждения приводят нас к картине линий поля, качественно изображенной на рисунке 1,*б*. Поле есть всюду, только вне конденсатора оно имеет малую напряженность, и тем меньшую, чем больше l/d. Таким образом, у краев плоского конденсатора поле неоднородно.

Опустим теперь край плоского конденсатора с вертикально расположенными пластинами в жидкость, например в воду. Поскольку молекулы воды представляют собой диполи (электронейтральная система двух зарядов, равных по модулю и противоположных по знаку), электрическое поле (направленное, например, вдоль знакомой нам силовой линии $dc0$) будет стремиться развернуть их параллельно вектору напряженности, т.е. вдоль силовой линии, как это показано на рисунке 2 в точках *a* и *b*. Пусть такой поворот произошел, и некий диполь принял положение *c*. Но поскольку заряды в диполе разнесены на некоторое расстояние (пусть малое, но конечное — например, порядка размера молекулы), силы $\vec{F}_+$ и $\vec{F}_-$, действующие на положительный и отрицательный заряды, не точно параллельны друг другу – просто потому, что силовая линия $dcba0$ есть кривая. Возникает результирующая сила $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-$, явно направленная внутрь конденсатора. Значит, жидкость будет втягиваться между пластинами конденсатора.

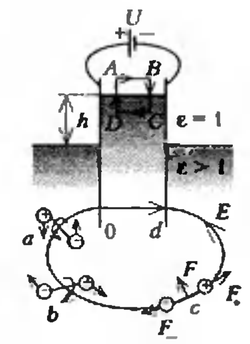


Рис. 2

«Замечательно! — воскликнет невдумчивый школьник, — мы получили насос, который должен работать вечно! Так можно перекачивать воду из рек на поля совершенно бесплатно — всего лишь опустив конденсатор в воду.» Но на то *он, школьник, и невдумчивый*.

А вдумчивый ответит, что это никак невозможно, поскольку опять получился бы вечный двигатель. Значит, втягивание должно закончиться тем, что в конденсаторе установится некоторый уровень воды. Потенциальное электростатическое поле поработает против потенциального поля тяготения, и равновесие наступит по достижении некоторого уровня воды h внутри конденсатора — уровня более высокого, чем снаружи.

А как найти эту высоту h? Конечно, можно определить суммарную силу $\vec{F} + m_0\vec{g}$, действующую на каждый диполь-молекулу, написать для него уравнение второго закона Ньютона и исследовать движение всех миллиардов миллиардов... молекул. Однако это утомительно. Поступим таким образом.

Если поле внутри плоского конденсатора над жидкостью осталось равным $E_0 = U/d$ (как и до погружения конденсатора), то плотность электрической энергии (т.е. энергия единицы объема) здесь есть $w_0 = \varepsilon_0 E_0^2/2$, где ε_0 — электрическая постоянная. Если поле внутри конденсатора в жидкости равно E_1, то плотность энергии равна $w_1 = \varepsilon\varepsilon_0 E_1^2/2$, где ε — диэлектрическая проницаемость жидкости. Значит, изменение электростатической энергии в объеме hdl при заполнении его жидкостью составляет $(w_1 - w_0)hdl$.

«Теперь все ясно! — скажет невдумчивый школьник, — я слышал где-то, что поле E_1 внутри диэлектрика в ε раз больше, и собираюсь подставить это в формулу.» И опять же – неверно!

Повторим тот же мысленный эксперимент, что и вначале: пронесем заряд q по замкнутому прямоугольному контуру $ABCDA$ (см. рис.2). Суммарная работа должна быть равна нулю: $0 = qE_0 \cdot AB - qE_1 \cdot CD$ (здесь мы не написали вклад в работу на участках BC и DA, поскольку горизонтальная сила перпендикулярна вертикальным перемещениям, а знак «минус» отражает тот факт, что на участке CD поле и перемещение противоположны по направлению). Но тогда $E_1 = E_0$, т.е. поля над жидкостью и внутри жидкости одинаковы. В таком случае изменение электростатической энергии конденсатора можно записать в виде

$$(w_1 - w_0)hdl = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 dlh,$$

т.е. оно прямо пропорционально h. При этом на конденсатор притек дополнительный заряд, прошедший через батарею и равный

$$q_1 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)lh.$$

Значит, батарея совершила работу

$$Uq_1 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 dlh.$$

За счет этой работы происходит упомянутое изменение электростатической энергии конденсатора и подъем жидкости внутри конденсатора под действием втягивающей силы $F_{вт}$. Поскольку изменение электростатической энергии конденсатора и работа батареи пропорциональны высоте h, закон сохранения энергии для малого приращения Δh запишем так:

$$(\varepsilon - 1)\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 dl\Delta h =$$

$$= \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 dl\Delta h + F_{вт}\Delta h,$$

откуда получим

$$F_{вт} = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 dl}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 = \text{const}.$$

В состоянии покоя эта сила будет равна силе тяжести столба жидкости

$$mg = \rho ghdl.$$

Отсюда для нужной нам высоты h получаем

$$h = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{2\rho g}\left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

А какая польза народному хозяйству от этого опускания конденсатора в жидкость? Польза есть. Например, если вам известны свойства жидкости (ρ, ε), то, измерив h и d, можно найти напряжение исследуемой батарейки. И заметьте себе — без каких-либо электрических приборов, только при помощи деревянной линейки. Такое устройство существует и называется капиллярным вольтметром, только в нем электроды — цилиндрические. Или, наоборот, если значение U написано на вашей батарейке (и вы этому верите), можно узнать диэлектрическую проницаемость ε какой-нибудь жидкости. Или... Впрочем, любая формула физики позволяет что-нибудь узнать.

Ну а если обрезать конденсатор на высоте меньше h — тогда (может быть?) жидкость начнет выливаться через верхний край конденсатора и получится бесплатный насос? Тут уж подумайте сами.

Солнце, лампа и кометы

А. СТАСЕНКО

Ну кто же не знает, что нагретые тела излучают тепло, а очень нагретые еще и светятся? В этом легко убедиться, включив утюг, став у костра или взглянув на Солнце. Интуитивно ясно, что чем выше температура нагретого тела, тем больше энергии оно будет излучать в единицу времени с единицы своей поверхности. Но как зависит эта величина, называемая плотностью потока энергии, от температуры? Тут нам очень помогут соображения размерностей.

Итак, нужно найти зависимость плотности потока энергии q, размерность которой $\frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{м}^2}$, от температуры T. Поскольку в основе самого процесса нагревания тела лежит тепловое движение его частиц, то температура должна входить вместе с множителем k, называемым постоянной Больцмана, т.е. в виде произведения kT. Далее, так как процесс излучения есть принципиально квантовое явление, то не обойтись без постоянной Планка h (это самая любимая константа в журнале «Квант»), а поскольку излучение представляет собой электромагнитную волну, то должна войти и скорость света c. Теперь воспользуемся методом размерностей и будем искать зависимость вида

$$q \sim (kT)^n h^m c^p,$$

или, подставив вместо каждой из величин ее размерность,

$$\frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{м}^2} = \text{Дж}^n \cdot (\text{Дж}\cdot\text{с})^m \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^p.$$

Для определения показателей степени n, m и p приравняем степени одинаковых размерностей справа и слева и получим три уравнения с тремя неизвестными:

$$1 = n + m,\ -1 = m - p,\ -2 = p.$$

Отсюда легко найдем

$$p = -2,\ m = -3,\ n = 4.$$

Таким образом,

$$q \sim \frac{(kT)^4}{h^3c^2} = aT^4,$$

где a — постоянная величина. Это так называемый закон Стефана – Больцмана.

Оценим постоянный множитель a, содержащий фундаментальные константы физики $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, $h = 6\cdot10^{-34}$ Дж·с, $c = 3\cdot10^8$ м/с (полюбуйтесь степенями — не каждый день такое увидишь!):

$$a = \frac{k^4}{h^3c^2} = 1{,}8\cdot10^{-9}\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{К}^4}.$$

Точное значение постоянного множителя при T^4 равно

$$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{К}^4}.$$

Да, мы ошиблись на порядок — но ведь и степени нешуточные. Впрочем, для дальнейшего нам достаточен лишь факт пропорциональности $q \sim T^4$.

Закон Стефана – Больцмана очень полезный закон. Например, с его помощью можно оценить температуру «поверхности» Солнца, даже не погружая в него термометр. Надо лишь знать среднюю температуру Земли $T_З$ и определить

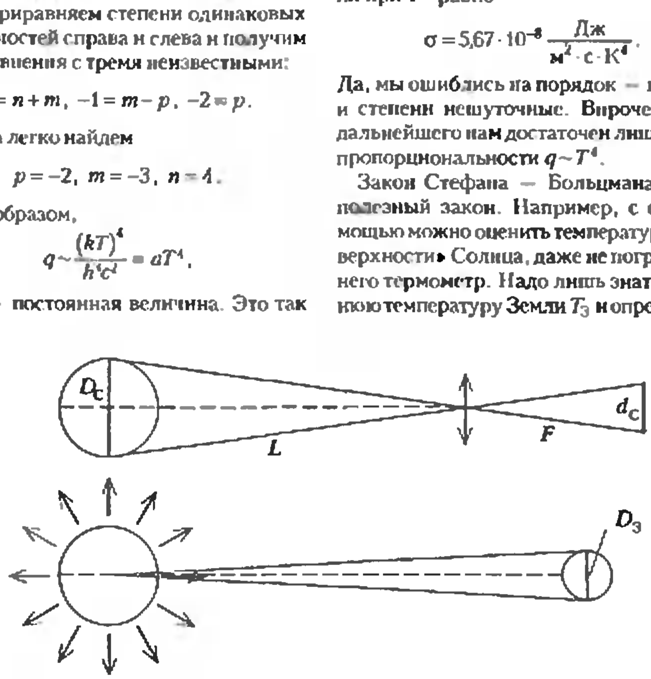


Рис. 1

угловой диаметр диска Солнца α_C, что легко сделать при помощи положительной линзы (рис.1). Измерив d_C и F (фокусное расстояние), получим $\alpha_C = d_C/F \approx 0{,}5$ градуса $= 10^{-2}$ радиана. Теперь запишем тот факт, что Земля заметно не нагревается и не охлаждается, по крайней мере в течение нашей жизни (имеется в виду средняя по поверхности температура $T_3 = 300$ К). Значит, тепло Солнца, поглощенное Землей, переизлучается ею же в космос. Если искомая температура Солнца T_C, то в единицу времени вся его поверхность излучает во всех направлениях энергию $\sigma T_C^4 \pi D_C^2$. Земля получает только часть этой энергии, равную отношению ее диаметрального сечения $\pi D_3^2/4$ к площади $4\pi L^2$ сферы с радиусом L, равным расстоянию между Землей и Солнцем. Вся эта энергия тут же излучается поверхностью Земли (хотя она и не раскалена и не светится) при ее температуре T_3. Итак,

$$\sigma T_C^4 \pi D_C^2 \frac{\pi D_3^2/4}{4\pi L^2} = \pi D_3^2 \sigma T_3^4,$$

откуда

$$T_C = T_3 \sqrt[4]{16\left(\frac{L}{D_C}\right)^2}.$$

Но ведь $D_C/L \approx \alpha_C \approx 10^{-2}$ рад (см. рис.1), так что

$$T_C = 300\sqrt[4]{\frac{16}{10^{-4}}}\ \text{К} = 6000\ \text{К}.$$

А зная температуру Солнца, можно оценить равновесные температуры других планет: Меркурия, Венеры, Марса, ... и даже гипотетического пояса Оорта, являющегося, по предположению, банком комет, прилетающих в Солнечную систему. Для этого нужно только знать, во сколько раз дальше (или ближе) от Солнца расположена эта планета. Например, считая пояс Оорта отстоящим в 20000 раз дальше, чем Земля, получим равновесную температуру комет: $T_к \sim 2$К — всего два градуса по шкале Кельвина! Ну это уж слишком мало — ведь вся Вселенная пронизана реликтовым равновесным излучением с температурой порядка 3 К, оставшимся от первородного взрыва. Значит, нужно учесть и приток к кометам энергии этого излучения.

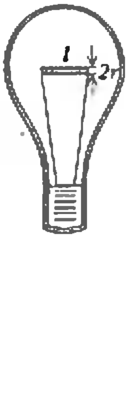


Рис. 2

Но вернемся на Землю. При помощи закона Стефана — Больцмана можно, например, узнать, как остывает нить накала вакуумной лампочки (рис.2). Считая эту нить цилиндром радиусом r и длиной l, запишем закон изменения ее температуры со временем в виде

$$d(CT) = -2\pi r l \sigma T^4 dt,$$

где C — теплоемкость нити, а знак «минус» означает потерю ее теплосодержания CT. Если в момент отключения ($t = 0$) температура была T_0, то

$$\frac{dT}{T^4} = -\frac{1}{3} d\left(\frac{1}{T^3}\right) = -\frac{2\pi r l \sigma}{C} dt,$$

или (считая C постоянной)

$$\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_0^3} = \frac{6\pi r l \sigma}{C} t.$$

Окончательно

$$T = \frac{T_0}{\sqrt[3]{1 + \frac{6\pi r l \sigma T_0^3}{C} t}}.$$

Отсюда можно найти такое время, за которое температура упадет, скажем, в два, три, четыре... раза (значит, излучаемая энергия — в 16, 81, 256,... раз соответственно), так что лампочка перестанет быть видимой в темноте. (Попробуйте самостоятельно провести такие оценки.)

Тут самое время вспомнить, что, согласно закону Планка, в излучении нагретого тела присутствуют электромагнитные волны всех длин. Наш глаз видит в так называемом оптическом диапазоне — от 0,4 до 0,7 мкм. На рисунке 3 приведен качественный вид распределения энергии в спектре равновесного излучения абсолютно черного тела при температурах $T_C = 6000$ К и $T_л = 2000$ К, характерных для поверхности Солнца и лампочки накаливания. Максимум кривой Планка для Солнца соответствует длине волны $\lambda_m = 0{,}5$ мкм, лежащей внутри оптического диапазона, что не удивительно: Природа за миллионы лет приспособила наши глаза именно к солнечному свету. Для лампы накаливания $\lambda_m = 1{,}5$ мкм, значит, основная часть ее излучения лежит в инфракрасной области спектра, так что эта лампа представляет собой скорее нагревательный прибор, чем осветительный. Кстати, отношение площадей под этими кривыми равно $(T_C/T_л)^4 = 3^4 = 81$, согласно тому самому закону Стефана — Больцмана, с которого мы начали.

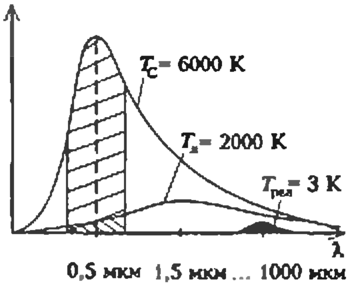


Рис. 3

Это потому, что площадь под каждой кривой и есть мощность излучения единицы поверхности тела во всем диапазоне длин волн от 0 до ∞.

А что там еще за бугорок (см. рис.3) в окрестности длины волны 1000 мкм, т.е. миллиметра? Это — спектральное распределение энергии реликтового излучения с температурой около 3 К.

В заключение посмотрим еще раз на рисунок 3 и сделаем еще одно интересное наблюдение. Умножим значения длин волн, соответствующие максимумам кривой Планка, на температуры, при которых построена каждая из этих кривых: 0,5 мкм · 6000 К — для Солнца, 1,5 мкм · 2000 К — для лампы накаливания, 1000 мкм · 3 К — для реликтового излучения. Получим одно и то же число. Возникает подозрение, что тут скрыт какой-то закон. Это подозрение еще раньше нас закралось в голову Вина, поэтому только что открытый закон уже носит его имя.

В этом номере мы открываем новый раздел под названием «Физический факультатив». В том виде, как он задумывался (идею этого раздела предложили член редколлегии нашего журнала С.А.Гордюнин и группа учителей московского лицея «Вторая школа»), Факультатив предназначен для читателей, серьезно увлекающихся физикой, любящих ломать голову над хитрыми вопросами, задачами и парадоксами, получающих удовольствие от красивого рассуждения или неожиданной физической аналогии. Это большая армия учеников (и учителей!) физматшкол и спецклассов с углубленным изучением физики, активистов олимпиадного движения. До этого им предназначался в первую очередь Задачник «Кванта» (развернутые решения многих задач которого превращались зачастую в небольшие заметки). И вот — новый раздел. Напишите нам, что вы хотели бы обсудить на его страницах, и присылайте нам заметки для этого раздела.

Метод электростатических изображений

А.ЧЕРНОУЦАН

Определение поля в пространстве вокруг проводников представляет собой трудную задачу. Достаточно редко удается решить ее простыми методами, без привлечения сложной математики или мощного компьютера. Причина состоит в том, что заранее не известно распределение зарядов по поверхности проводника. Известно лишь, что они занимают такое (единственное!) положение, при котором напряженность поля внутри проводника равна нулю. Значит, нельзя сразу же применять привычный метод суперпозиции, что создает психологические трудности. Неудивительно, что в школе ограничиваются рассмотрением одной задачи — об уединенном проводящем шаре, — в которой распределение заряда является очевидным.

В этой заметке мы продемонстрируем, как соображения симметрии позволяют в некоторых случаях «угадать», или, точнее, «сконструировать» решение. Мы рассмотрим только один тип задач — проводник в поле точечного заряда $+q$. Заряды на проводнике перераспределяются так, чтобы скомпенсировать напряженность точечного заряда внутри проводника. Поле этих наведенных зарядов есть и вне проводника, в частности, оно действует на заряд $+q$ с силой $\vec{F} = q\vec{E}_{нав}$.

Чтобы задача была определена, необходимо, как говорят математики, задать граничные условия. Возможны следующие случаи:

1) Известен заряд проводника Q. Например, если $Q = 0$, то на ближайшей к заряду $+q$ поверхности проводника будут распределены отрицательные наведенные заряды, а на дальней — положительные (рис.1,*а*). Видно, что заряд и незаряженный проводник (на рисунке — шар) притягиваются друг к другу.

2) Известен потенциал проводника. Предполагается, что он соединен проволокой с удаленным большим проводником известного потенциала. Например, при соединении с землей (заземлении) принимается, что потенциал равен нулю (как на бесконечности). На заземленном проводнике появляется отрицательный наведенный заряд, и он притягивает заряд q сильнее, чем незаряженный (рис.1,*б*).

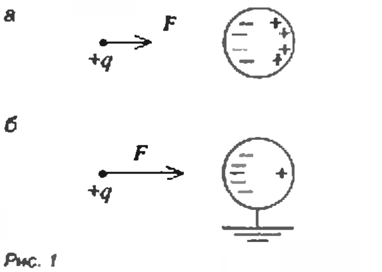


Рис. 1

Самая простая форма проводника — сферическая. Мы постараемся к концу заметки полностью решить задачу о проводящем шаре в поле точечного заряда. «Полностью решить» — значит научиться вычислять напряженность поля во всем пространстве, силу взаимодействия заряда и проводника, а также величину наведенного заряда и его распределение по поверхности проводника.

Интересно, что на некоторые вопросы можно ответить довольно легко. Определим, например, какой заряд появится на заземленном шаре, если точечный заряд q находится на расстоянии L от его центра. Для этого воспользуемся тем, что потенциал центра шара (как и всех его точек) равен нулю. Выразим его через заряды:

$$k\frac{q}{L} + \sum_i k\frac{\Delta Q_i}{R} = k\frac{q}{L} + k\frac{Q_{нав}}{R} = 0$$

(потенциал, создаваемый наведенными зарядами в центре шара, не зависит от их распределения, так как все они находятся на расстоянии R от центра). Получаем

$$Q_{нав} = -q\frac{R}{L}. \qquad (1)$$

Но как действовать дальше? Чтобы понять, какой вид может иметь решение, рассмотрим сначала совсем другой проводник — бесконечную плоскость (или, что то же самое, полупространство). Совершенно неожиданно соображения симметрии позволят нам полностью решить эту задачу и подскажут, как можно подойти к задаче о заряде и шаре.

Пусть проводник занимает все правое полупространство (рис. 2). Вычислить поле вне проводника (слева от OO') нам поможет тот очевидный факт, что поле наведенных зарядов симметрично относительно плоскости OO'. Раз это поле в проводнике компенсирует поле заряда $+q$, то оно совпадает с полем воображаемого заряда $-q$, помещенного в ту же точку, что и заряд $+q$. Теперь ясно, что

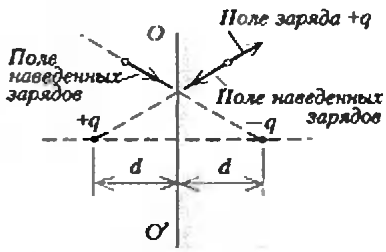


Рис. 2

поле, которое создают наведенные заряды слева от OO' (вне проводника), в точности равно полю воображаемого заряда $-q$, но помещенного по другую сторону от плоскости OO', симметрично по отношению к заряду $+q$. Этот воображаемый заряд $-q$ называют *изображением* заряда $+q$.

Итак, плоская поверхность проводника притягивает точечный заряд $+q$, удаленный от нее на расстояние d, с такой же силой, с какой его притягивал бы заряд $-q$, удаленный на расстояние $2d$:

$$F = k\frac{q^2}{(2d)^2}.$$

Мы получили удивительный результат: поле, создаваемое зарядом и проводником (рис.3,*а*), в пространстве вне проводника совпадает с полем всего двух точечных зарядов (рис.3,*б*). Почему оказалась возможной такая подмена? Вспомним, что поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность, причем в нашем примере потенциал проводника равен нулю. Поле же двух зарядов $+q$ и $-q$ обладает следующим свойством: эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ совпадает с плоскостью симметрии OO', т.е. точно повторяет форму поверхности рассматриваемого проводника. Именно в этом причина совпадения полей, изображенных на рисунке 3.

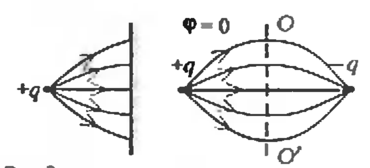


Рис. 3

В других случаях тоже надо стремиться расположить заряды-изображения внутри проводника так, чтобы поверхность нужного постоянного потенциала совпадала с поверхностью проводника. Тогда поле внешних зарядов и проводника будет совпадать с полем внешних зарядов и зарядов-изображений (т.е. проводник подменяется изображениями). Дело в том, что граница рассматриваемой области (пространства вне проводника) имеет в этих случаях одинаковый потенциал, и расположение зарядов внутри области также одно и то же (все изображения находятся в проводнике, т.е. вне этой области). Выполнения этих условий достаточно, чтобы утверждать, что поля совпадают всюду внутри области. Это утверждение часто называют *принципом единственности в электростатике*.

Возникает резонный вопрос – как это сделать? Как найти заряды-изображения и их положения, если известны форма и потенциал проводника? К сожалению, в общем случае такого рецепта не существует, и обычно приходится действовать, как говорят, «с конца» – от зарядов к проводнику. Возьмем несколько точечных зарядов, рассчитаем их поле, найдем любую эквипотенциальную поверхность $\varphi = \varphi_0$ и заполним пространство внутри этой поверхности проводником с потенциалом φ_0. Тогда поле, которое мы уже рассчитали, представляет собой готовое решение для получившегося проводника и тех зарядов, что оказались вне его. Заряды же, которые «погибли» внутри проводника, играют роль зарядов-изображений. Таким способом можно построить много «готовых» решений, правда нет гарантии, что всегда удастся подобрать решение под заранее выбранный проводник.

Вот пример. Рассмотрим какую-нибудь эквипотенциальную поверхность для тех же зарядов $+q$ и $-q$, например с $\varphi = -1$ В (рис.4,*а*). Поле зарядов вне этой поверхности совпадает с полем заряда $+q$ и проводника, имеющего фиксированный потенциал $\varphi = -1$ В (рис.4,*б*).

Еще пример. Поле четырех зарядов $+q$, $+q$, $-q$ и $-q$, размещенных в вершинах прямоугольника (рис.5,*а*), имеет эквипотенциальную поверхность $\varphi = 0$ в виде двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Значит, часть этого поля, заключенная в первом квадранте, совпадает с полем заряда $+q$, помещенного в двугранный угол (рис.5,*б*). Три других заряда являются изображениями заряда $+q$. Попробуйте сами найти решение для заряда, помещенного в трехгранный угол (для этого вам придется использовать семь дополнительных зарядов).

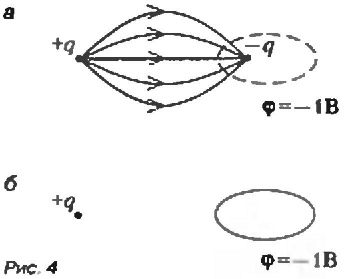


Рис. 4

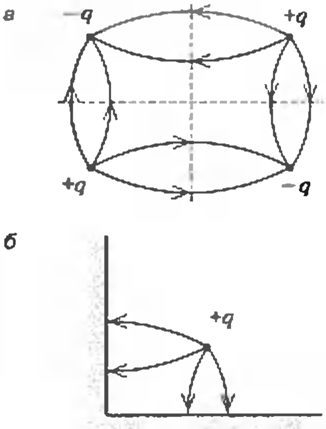


Рис. 5

Вернемся к проводящему шару. Возьмем два заряда $+q_1$ и $-q_2$ ($q_1 > q_2$), расположенных на расстоянии l друг от друга (рис.6,*а*). Оказывается, что эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ представляет собой сферу. (Потенциал точечного заряда q имеет вид $\varphi = kq/r$. Условие $kq_1/r_1 - kq_2/r_2 = 0$ преобразуется в равенство $r_1/r_2 = q_1/q_2$, т.е. описывает геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до заданных двух точек имеет фиксированное значение.) Чтобы определить радиус этой сферы R и расстояние L от ее центра до заряда $+q_1$, можно приравнять к нулю потенциалы точек A и B:

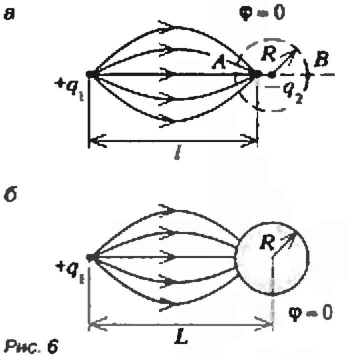


Рис. 6

$$k\frac{q_1}{L-R} - k\frac{q_2}{R-(L-l)} = 0,$$

$$k\frac{q_1}{L+R} - k\frac{q_2}{R+(L-l)} = 0.$$

Поле данных двух зарядов в пространстве вне сферы в точности совпадает с полем, которое возникает, если заряд $+q_1$ поместить на расстоянии L от центра заземленного проводящего шара радиусом R (рис.6,*б*). В том случае, когда задано положение шара, нам известны R и L, а положение отрицательного заряда-изображения (l) и его величину (q_2) можно найти:

$$l = L - \frac{R^2}{L}, \quad q_2 = \frac{q_1 R}{L} \qquad (2)$$

(расстояние от q_2 до центра равно R^2/L). Сравните ответ для q_2 с полученным ранее ответом (1) для заряда на заземленном шаре. Сила, с которой заряд $+q_1$ притягивается к шару, равна

$$F = k\frac{q_1 q_2}{l^2}.$$

А как быть в случае, если задан заряд шара Q? Оказывается, решение этой задачи легко получить из задачи о заземленном шаре. Сконструируем ответ следующим образом. Рассмотрим заземленный шар в поле заряда q_1, отсоединим его от земли и, не позволяя зарядам смещаться, распределим равномерно по поверхности шара дополнительный заряд $q_3 = Q + q_2$. Так как до этого на шаре был заряд $-q_2$, то полный заряд шара станет равен Q. При этом напряженность поля внутри шара останется равной нулю. Значит, в соответствии с принципом единственности, мы нашли правильное решение. Поле наведенных зарядов вне шара будет совпадать с полем двух точечных зарядов: $-q_2$ на расстоянии R^2/L от центра шара и q_3 в центре шара. Например, в случае незаряженного шара ($Q = 0$) получаем $q_3 = q_2$, и сила притяжения между точечным зарядом q_1 и незаряженным проводящим шаром оказывается равной

$$F = k\frac{q_1 q_2}{l^2} - k\frac{q_1 q_2}{L^2},$$

где L — расстояние от заряда q_1 до центра шара, l и q_2 определяются формулами (2).

Осталось ответить на один вопрос — как найти распределение зарядов по поверхности проводника? Для этого надо рассчитать напряженность поля E возле той точки поверхности, которая нас интересует (напомним, что E перпендикулярна к поверхности), и воспользоваться формулой, связывающей напряженность с поверхностной плотностью заряда (см. Приложение):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Например, в случае проводящей плоскости поле равно векторной сумме полей заряда q и заряда-изображения $-q$. На расстоянии x от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость (рис.7), напряженность равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{x^2+d^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qd}{(x^2+d^2)^{3/2}},$$

откуда находим

$$\sigma(x) = \frac{2qd}{4\pi(x^2+d^2)^{3/2}}.$$

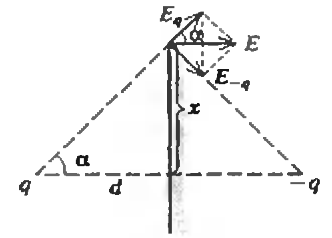


Рис. 7

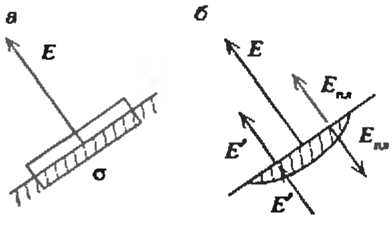


Рис. 8

Приложение

Выведем формулу (3) двумя способами для тех, кто уже знаком с теоремой Гаусса[1], и для тех, кто пока предпочитает обходиться без нее.

С теоремой Гаусса все очень просто: надо применить ее к маленькому плоскому цилиндру, одно основание которого находится в проводнике, а другое — вне него (рис. 8,а): $ES = \sigma S/\varepsilon_0$, откуда получаем (3).

Другое доказательство основано на выделении вклада близлежащего участка поверхности. Если этот участок достаточно мал, то его можно считать плоским и вблизи центра (на расстояниях, малых по сравнению с размерами участка) совпадающим с полем $\vec{E}_{пл}$ бесконечной равномерно заряженной плоскости (рис. 8,б). Поле $\vec{E}'$ всех остальных зарядов не испытывает скачка на поверхности, оно уничтожает поле $\vec{E}_{пл}$ внутри проводника и складывается с $\vec{E}_{пл}$ вне него: $E_{пл} + E' = E$, $E_{пл} - E' = 0$, получаем, что для любого проводника поле возле его поверхности выражается через поле равномерно заряженной плоскости: $E = 2E_{пл}$. И тут самое время вспомнить, что в одном из случаев поле проводника нам хорошо известно — это поле уединенного заряженного шара. Возле поверхности шара

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot 4\pi R^2}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда мы немедленно делаем вывод, что такой же ответ годится для произвольного проводника, а заодно получаем в качестве «навара» поле бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

[1] *См., например, статью «Силовые линии и теорема Гаусса», которую можно найти в журнале «Квант» №3 за 1990 г. или в Приложении к журналу «Квант» № 5/95.*

ИНФОРМАЦИЯ

Турнир юных физиков

(Начало см. на с. 5)

вверх-вниз с частотой порядка 100 Гц. Конусообразная кучка мелкодисперсного порошка (например, ликоподия или талька), насыпанная на пластину, остается устойчивой при малых амплитудах вибраций. Если амплитуда увеличивается, конус разрушается. Дальнейшее увеличение амплитуды приводит к распределению, очерченному резкой границей, а при еще более высоких амплитудах снова возникает кучка. Исследуйте и объясните явление.

5. Автоколебания. Изготовьте и исследуйте автоколебательную систему, содержащую термистор в качестве единственного нелинейного элемента.

6. Водяной генератор. Если некоторый объем воды замораживать с одной стороны, то на границе «лед — вода» возникает разность потенциалов. Измерьте ее и объясните явление.

7. Солнце. В центре Солнца внезапно выделилось «сверхплановое» количество энергии, равное энергии, излучаемой Солнцем за один год. Как будут изменяться в течение одного года наблюдаемые с Земли параметры Солнца?

8. «Поверхностная» информация. Разработайте способ передачи информации, в котором она переносилась бы волнами на поверхности воды. Исследуйте направленность изготовленных Вами передающих и приемных устройств (антенн).

9. Полотер. Устройство опирается на горизонтальную поверхность плоскостями двух одинаковых дисков, которые могут вращаться в противоположных направлениях с заданной скоростью. Исследуйте, как зависит величина силы, приложенной к устройству для его равномерного перемещения вдоль горизонтальной поверхности, от скорости этого перемещения и скорости вращения дисков.

10. Мыльные пузыри. Колечко детской игрушки для выдувания мыльных пузырей обмакивают в мыльный раствор и дуют на образовавшуюся в кольце мыльную пленку. При какой скорости воздушного потока начнут выдуваться пузыри? Как нужно регулировать скорость потока, чтобы выдуть пузырь максимального размера?

11. Свеча. Многие свечи перед тем как погаснуть мерцают. Исследуйте и объясните это явление.

12. Автомобиль. Автомобиль въезжает на мокрый участок прямолинейного шоссе. Как будет изменяться его скорость, если толщина слоя воды медленно нарастает с расстоянием по линейному закону? Считать, что двигатель автомобиля работает с постоянной мощностью.

13. «Серый свет». Изготовьте источник света, воспринимаемого глазом как серый.

14. Когерер. Известно, что стеклянная трубка с двумя электродами и металлическими опилками между ними (когерер) обладает различным сопротивлением в цепях постоянного и переменного тока. Исследуйте зависимость электрического сопротивления когерера от частоты тока.

15. Соляной осциллятор. Стаканчик с небольшим отверстием в дне, содержащий соленую воду, укреплен частично погруженным в широкий сосуд с пресной водой. Объясните механизм наблюдаемого периодического процесса и исследуйте зависимость его периода от различных параметров. Для наглядности соленую воду следует подкрасить.

16. Град. Объясните механизм возникновения града и предложите собственный метод предотвращения его выпадения.

17. Перчатки. Некоторые люди отказываются носить перчатки зимой, потому что считают, что в перчатках холоднее, чем без них. Другие предпочитают носить варежки вместо перчаток. А как думаете Вы?

Публикацию подготовили
В.Лобышев, Е.Юносов

Замечательный четырехвершинник

Н.АСТАПОВ, А.ЖУКОВ

Выберем в пространстве четыре различные точки и последовательно соединим их отрезками: первую — со второй, вторую — с третьей, третью — с четвертой, а четвертую точку соединим с первой. Назовем полученную фигуру *четырехвершинником*. В общем случае четырехвершинник представляет собой замкнутую ломаную, которая может быть, например, частью «каркаса» тетраэдра (рис. 1). Очевидно, что четырехвершинник — естественное обобщение понятия четырехугольника, потому что произвольный выпуклый (рис. 2) и вогнутый (рис. 3) четырехугольники являются плоскими четырехвершинниками. Поэтому утверждения, верные для любых четырехвершинников, справедливы также и для любых четырехугольников. Плоский четырехвершинник на рисунке 4 четырехугольником не является, поскольку замкнутая ломаная $ABCDA$ имеет самопересечение. Часть вершин или даже все вершины четырехвершинника могут лежать на одной прямой. Отрезки, соединяющие соседние вершины четырехвершинника (у первой вершины соседи — вторая и четвертая), назовем сторонами, а соединяющие несоседние — диагоналями. Далее будем считать, что четырехвершинник $ABCD$ задан порядком обхода своих вершин A, B, C, D, причем $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{c}$, $\vec{AD} = \vec{d}$, $\vec{AC} = \vec{e}$, $\vec{BD} = \vec{f}$, $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$, $|\vec{d}| = d$, $|\vec{e}| = e$, $|\vec{f}| = f$, φ — угол между векторами $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$.

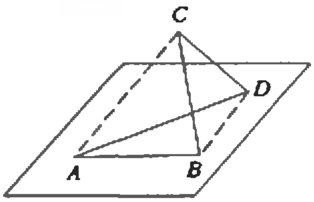


Рис. 1

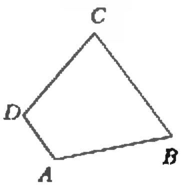


Рис. 2

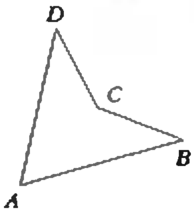


Рис. 3

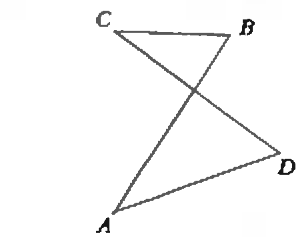


Рис. 4

Теорема 1. *Для любого четырехвершинника справедливо равенство*

$$\vec{e}\,\vec{f} = \frac{b^2 - d^2 - a^2 - c^2}{2}. \qquad (1)$$

Доказательство. Заметим, что $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{f} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, тогда $d^2 = \vec{d}\,\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c}$, поэтому $\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} = \frac{1}{2}(d^2 - a^2 - b^2 - c^2)$. Следовательно, $\vec{e}\,\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) = b^2 + \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} = \frac{1}{2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)$.

Напомним, что, соединив те же точки в другом порядке, мы получим другой четырехвершинник. Например, у четырехвершинника $ABDC$ диагоналями являются отрезки $AD = d$ и $BC = b$ и, в силу теоремы 1, для него справедливо равенство

$$\vec{d}\,\vec{b} = \left(f^2 + e^2 - a^2 - c^2\right)/2, \qquad (1')$$

связывающее те же самые, что и равенство (1), шесть расстояний между точками A, B, C, D и угол между диагоналями.

Если представить себе четырехвершинник с фиксированными длинами сторон в виде шарнирной модели, то равенство (1) можно интерпретировать следующим образом: как бы мы ни двигали вершины модели, величина $I = \vec{e}\,\vec{f} = ef\cos\varphi$ будет оставаться постоянной (несмотря на то, что длины диагоналей и угол между ними по отдельности будут изменяться). Такие числовые характеристики, не изменяющиеся в процессе каких-либо преобразований, принято называть *инвариантами*. Таким образом, I — инвариант деформаций «шарнирного четырехвершинника». Посмотрим, как «работают» теорема 1 и инвариант I при решении задач.

Задача 1. *Докажите, что в произвольной трапеции $ABCD$ сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC\cdot AD$.*

Решение. Из теоремы 1 для четырехвершинника $ACDB$ получаем $bd\cos 180° = -bd = \left(c^2 + d^2 - e^2 - f^2\right)/2$, или $e^2 + f^2 = a^2 + c^2 + 2bd$, что и требовалось доказать. Заметим, что если в трапеции основания b и d равны, то $a = c$ и предыдущее равенство, полученное для произвольной трапеции, превращается в известное равенство для суммы квадратов диагоналей параллелограмма: $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Задача 2. *Выразите площадь S четырехугольника через длины его сторон и диагоналей.*

Решение. Воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$ для площади четырехугольника. Отсюда

$$S^2 = \frac{1}{4}e^2f^2\left(1 - \cos^2\varphi\right) = \frac{1}{4}\left(e^2f^2 - I^2\right)$$

и

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}e^2f^2 - \frac{1}{16}\left(b^2 + d^2 - a^2 - c^2\right)^2}.$$

Задача 3. *Заданы длины всех сторон и площадь четырехугольника. Найдите угол между его диагоналями.*

Решение. Так как $(ef)^2 = 4S^2 + I^2$ (см. решение задачи 2), то пользуясь равенством (1), получим

$$\varphi = \arccos\left(I/\sqrt{4S^2 + I^2}\right).$$

Теорема 2. *Для любого четырехвершинника справедливо равенство*

$$\vec{e}\,\vec{f} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{d}. \qquad (2)$$

Доказательство. Равенство (2) получается в результате вычитания из равенства $\vec{e}\,\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{b} + \vec{b}\vec{c}$ соотношения $\vec{b}\vec{d} = \vec{b}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{b}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} + \vec{b}\vec{c}$.

Задача 4. *Докажите, что высоты произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть высоты, опущенные из вершин A и C, пересекаются в точке D. Утверждение $BD \perp AC$ получается как простое следствие формулы (2) в результате рассмотрения четырехвершинника $ABCD$.

Задача 5. *Докажите, что в тетраэдре $ABCD$ суммы квадратов противопо-*

ложных пар ребер равны, если две пары противоположных ребер перпендикулярны.

Решение. Сразу заметим, что в таком тетраэдре все противоположные пары ребер перпендикулярны — это следует из равенства (2). А из равенства (1) следует, что диагонали четырехвершинника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов двух противоположных пар сторон равны. Теперь утверждение задачи 5 получится вследствие рассмотрения двух различных четырехвершинников, построенных из «каркаса» тетраэдра $ABCD$.[1]

Представляет интерес ответ на вопрос — будет ли выполняться равенство

$$ef = ac + bd. \qquad (3)$$

аналогичное равенству (2), связывающее длины сторон четырехвершинника?

Еще на заре нашей эры было известно, что равенство (3) выполняется для некоторых плоских четырехвершинников.

Теорема Птолемея.[2] *В четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

Доказательство. Проведем прямую BM так, чтобы $\angle MBC = \angle ABD$ (рис. 5).

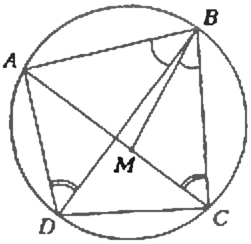


Рис. 5

Поскольку $\angle ADB = \angle ACB$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), то $\Delta ABD \sim \Delta MBC$. Поэтому $AD:MC = BD:BC$, откуда $BD \cdot MC = AD \cdot BC$. Аналогично устанавливается подобие треугольников ABM и DBC. Отсюда $AB:BD = AM:CD$, т.е. $BD \cdot AM = AB \cdot CD$. Сложив полученные равенства и приняв во внимание, что $AM + MC = AC$, имеем $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$, что и требовалось доказать.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 3. *Если длины сторон и диагоналей четырехвершинника удовлетворяют равенству (3) и не все его вершины расположены на одной прямой, то четырехвершинник является четырехугольником, который можно вписать в окружность.*

Доказательство. Воспользуемся методом координат — небольшая модификация этого доказательства позволит нам в дальнейшем получить одно полезное неравенство. Не умаляя общности, будем считать, что вершины A, B, C четырехвершинника расположены не на одной прямой. Выберем такую систему прямоугольных координат, в которой вершины имеют следующие координаты: $A(-1,0,0)$, $B(u,v,0)$, $C(1,0,0)$, $D(x,y,z)$. В выбранной системе координат центр окружности, проходящей через точки A, B, C, имеет координаты $O(0,a,0)$, а радиус окружности равен $R = \sqrt{a^2+1}$. Равенство (3) в координатной форме запишется так:

$$2\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+z^2} =$$

$$= \sqrt{(u+1)^2+v^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} +$$

$$+ \sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}\sqrt{(y-1)^2+v^2}. \qquad (4)$$

Используя обозначение $t = x^2+y^2+z^2$ и соотношение $u^2+v^2 = 2av+1$, которое следует из равенства $BO = R$, запишем равенство (4) следующим образом:

$$2\sqrt{t-2xu-2yv+2av+1} =$$

$$= \sqrt{2av+2+2u}\sqrt{t+1-2x} +$$

$$+ \sqrt{t+1+2x}\sqrt{2av+2-2u}. \qquad (5)$$

Возведя обе части равенства (5) в квадрат и приведя подобные члены, получим

$$v(a-at-2y) =$$

$$= \sqrt{(t+1)^2-4x^2}\sqrt{(av+1)-u^2}.$$

Так как $(av+1)^2-u^2 = (a^2+1)v^2$, то, возведя в квадрат обе части полученного равенства, находим

$$v^2(a-at-2y)^2 = \left((t+1)^2-4x^2\right)(a^2+1)v^2.$$

Учитывая, что $v \neq 0$, отсюда выводим

$$\left((t+1)^2-4x^2\right)(a^2+1)-(a-at-2y)^2 =$$

$$= (t-2ay-1)^2+4(a^2+1)(t-x^2-y^2) =$$

$$= (t-2ay-1)^2+4(a^2+1)z^2 = 0,$$

что возможно только при $z = 0$ и $t - 2ay - 1 = 0$. Условие $z = 0$ свидетельствует о том, что точка D лежит в плоскости ABC, а записав равенство $t - 2ay - 1 = 0$ в виде $x^2 + (y-a^2) = a^2 + 1 = R^2$, убеждаемся, что точка $D(x,y,0)$ лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Осталось доказать, что четырехвершинник $ABCD$ является четырехугольником. Предположим противное. Тогда $ACBD$ или $ACDB$ — вписанный четырехугольник, и по теореме Птолемея имеем $ac = ef + bd$ или $bd = ef + ac$, что противоречит условию (3). Теорема полностью доказана.

Заметим, что если точка D не лежит на окружности, описанной около треугольника ABC (например, не лежит в плоскости ABC), то выполняется строгое неравенство $(t-2ay-1)^2 + 4(a^2+1)z^2 > 0$, и, прослеживая предыдущие преобразования в обратном порядке (проделайте это самостоятельно), получим неравенство $ef < ac + bd$.

Убедитесь самостоятельно в том, что если вершины четырехвершинника располагаются на одной прямой, то будет выполняться неравенство $ef \leq ac + bd$. Итак, для любого четырехвершинника справедливо неравенство

$$ef \leq ac + bd. \qquad (6)$$

Отметим важность полученного неравенства. Его можно назвать неравенством четырехвершинника по аналогии с известным неравенством треугольника. Так, неравенство $e \leq a + b$ для треугольника ABC можно вывести из неравенства (6) для четырехвершинника $ABCD$, если, например, взять вершину D в центре окружности, описанной около треугольника ABC. Кроме неравенства (6) справедливы неравенства $ac \leq bd + ef$ и $bd \leq ac + ef$, которые получим, рассматривая четырехвершинники $ACBD$ и $ABDC$.

Задача 6. *Диагонали заданного своими сторонами и вписанного в окружность четырехугольника перпендикулярны. Найдите длины диагоналей.*

Решение. Так как диагонали четырехугольника перпендикулярны, то из равенства (1) имеем $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Следовательно, можно построить два прямоугольных треугольника со сторонами a, c, k и b, d, k, у которых k является гипотенузой и одновременно диаметром окружности, описанной около четырехугольника со сторонами a, c, b и d (рис. 6): $k^2 = a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. По теореме Птолемея $kf = ab + cd$, следовательно, одна из искомых диагоналей равна

$$f = \frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}};$$

кроме того, $ef = ac + bd$, отсюда длина

---

[1] *Тетраэдры с перпендикулярными парами противоположных ребер составляют класс так называемых ортоцентрических тетраэдров. Об их замечательных свойствах можно прочитать в статье В.Э.Матизена и В.Н.Дубровского «Из геометрии тетраэдра» («Квант» № 9 за 1988 год).*

[2] *Клавдий Птолемей (ок. 90 — ок. 160) — древнегреческий астроном, математик, географ.*

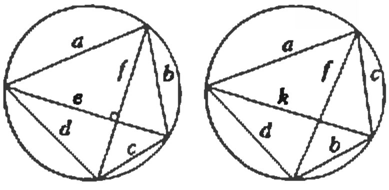


Рис. 6

второй диагонали

$$e = \frac{ac+bd}{ab+cd}\sqrt{a^2+c^2}.$$

Задача 7. *Докажите, что из всех четырехугольников с заданными сторонами наибольшую площадь имеет четырехугольник, вписанный в окружность.*

Решение. Мы видели (см. задачу 2), что площадь S четырехугольника со сторонами a, b, c, d выражается так:

$$S^2 = \frac{1}{4}\left(e^2f^2 - l^2\right). \qquad (7)$$

Для площади S_0 вписанного в окружность четырехугольника с такими длинами сторон a, b, c, d и диагоналями m, n имеем

$$S_0^2 = \frac{1}{4}\left(m^2n^2 - l^2\right). \qquad (8)$$

По теореме Птолемея

$$mn = ac + bd. \qquad (9)$$

Из соотношений (6) — (9) получаем

$$S_0^2 - S^2 = \frac{1}{4}\left((ac+bd)^2 - e^2f^2\right) \ge 0,$$

следовательно, $S_0 \ge S$, что и требовалось доказать.

Задача 8 (В.Э.Матизен, задача М1039, «Квант» № 8 за 1987 год). *Докажите, что если три угла между противоположными ребрами тетраэдра равны, то они прямые.*

Решение. Обозначим угол между противоположными ребрами тетраэдра $ABCD$ через α. Углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ равны α или $180° - \alpha$. Равенство (2) для четырехвершинника $ABCD$ запишется в виде $\cos\alpha \cdot (\pm ac \pm bd \pm ef) = 0$, где вместо $\pm$ надо взять либо $-$, либо $+$. Согласно неравенству (6), выражение в скобках не равно нулю, поэтому $\cos\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$.

Вот так знание свойств четырехвершинников существенно упрощает решение некоторых геометрических задач.

Упражнения

1. Найдите проекцию наклонной BD на сторону AC, зная длины сторон треугольника ABC и длину отрезка AD.

2. В равнобочной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) заданы $AB = CD$, AD и AC. Найдите BC.

3. Четырехугольник с заданными сторонами вписан в окружность. Вычислите угол между его диагоналями.

4. Покажите, что длина биссектрисы, заключенной между сторонами a и b треугольника, не больше $2ab/(a+b)$.

5. Точки A и C лежат на одной стороне угла AND, а точки B и D на другой, причем $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 2$, $AD = 1$. Докажите, что $|\cos\angle AND| \ge \frac{5}{11}$.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Как измерить длину световой волны с помощью... логарифмической линейки

Я.АМСТИСЛАВСКИЙ

Автор этих строк однажды уже рассказывал на страницах журнала «Квант» (1982, № 6, с. 15) об интересных свойствах стеклянной пластинки, запыленной ликоподием. Ликоподий — это желтый порошок, состоящий из спор плауна, он используется в медицинской практике и продается в аптеках. Особенность частиц этого порошка состоит в том, что они имеют близкую к сферической форму и практически одинаковые размеры порядка 30 мкм в диаметре.

Если запылить ликоподием стеклянную пластинку так, чтобы образовался полупрозрачный монослой, и посмотреть через нее на светящуюся нить обычной лампочки накаливания, то можно увидеть красивую дифракционную картину. Она представляет собой широкий центральный светлый круг с источником в средней своей части (его называют кругом Эйри), к которому прилегают несколько быстро убывающих по яркости светлых колец. Если ликоподиевое покрытие нанесено на прозрачную пластинку, то эти кольца оказываются окрашенными — от фиолетового цвета к красному. Если же такую запыленную пластинку используют вместе с цветным стеклом, то светлые кольца, прилегающие к кругу Эйри, одноцветны и отделены одно от другого хорошо видимыми темными кольцами. Как показывают теория и расчеты, угловые радиусы φ_i этих темных колец удовлетворяют формуле

$$d\sin\varphi_i = k_i\lambda, \qquad (1)$$

где d — диаметр непрозрачных шариков ликоподия, λ — длина световой волны, а k_i — коэффициент, который для первого, второго и третьего темных колец принимает соответственно значения $k_1 = 1{,}220$, $k_2 = 2{,}233$ и $k_3 = 3{,}238$.

Прежде чем начать экспериментировать, преобразуем формулу (1) для конкретных условий наблюдения. Пусть запыленная пластинка *ЗП* вплотную соприкасается с красным светофильтром *Ф*, а дифракционная картина, рассматриваемая глазом *Г* наблюдателя, формируется в плоскости I—I, проходящей через источник света — лампочку накаливания *Л* (рис. 1). Предположим, что

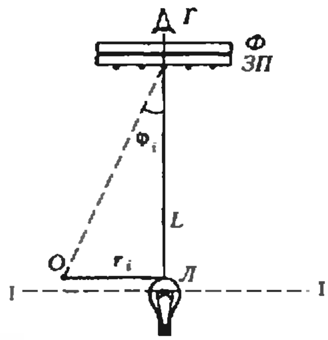


Рис. 1

i-е темное кольцо имеет радиус r_i. Из рисунка видно, что $\mathrm{tg}\,\varphi_i = r_i/L$. В нашем случае — $i \le 3$, $\lambda = 0{,}65$ мкм, $d = 30$ мкм — угол φ_i не превосходит нескольких градусов, поэтому расхождения между $\sin\varphi_i$ и $\mathrm{tg}\,\varphi_i$ пренебрежимо малы и можно принять $\sin\varphi_i = \mathrm{tg}\,\varphi_i = r_i/L$. Теперь введем диаметр темного кольца $D_i = 2r_i$ и воспользуемся соотношением (1) для выражения длины световой волны λ. Учитывая, что $d = 30$ мкм, запишем это соотношение в виде

$$\lambda = 15\frac{D_i}{k_i L}. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что если D_i и L выразить в одних и тех же единицах (например, сантиметрах), то λ получится в мкм.

Для того чтобы определить длину световой волны по формуле (2), необходимо иметь возможность измерять диаметры D_i темных дифракционных колец картины. Вот тут-то незаменимой по удобству и доступности и может оказаться простая, старая и в наши дни вряд ли кому нужная логарифмическая линейка.

Прибор (рис. 2), включающий логарифмическую линейку как важное измерительное устройство, удобно собрать на деревянной площадке размером, например, 18 × 20 см, отрезанной от доски

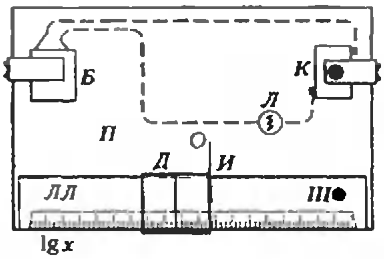


Рис. 2

толщиной 2 см. Площадку *П* покрывают листом черной оберточной бумаги и закрепляют на ней лампочку *Л* на 3,5 В от карманного фонарика и логарифмическую линейку *ЛЛ*. Для закрепления лампочки в площадке высверливают сквозное отверстие и углубляют в него цоколь лампочки с припаянными двумя проводниками, а питание лампочки осуществляют от плоской батарейки *Б* через кнопочный выключатель *К*. На нижнюю половину колбочки лампочки надевают экранирующее колечко шириной около 0,5 см, склеенное из черной бумаги. Перед закреплением логарифмической линейки выступающую за пределы площадки часть линейки (длиной около 8 см) спиливают пилкой по металлу, вблизи края линейки просверливают отверстие подходящего диаметра под шуруп, покрывают линейку полоской черной или белой бумаги, закрывающей на лицевой ее стороне все шкалы, кроме линейной логарифмической шкалы ($\lg x$), и прикрепляют линейку к площадке при помощи шурупа *Ш*. К правому краю движка *Д* линейки клеем «Момент», «Феникс» или любым другим подходящим клеем приклеивают обычную швейную иголку *И*. В процессе измерения диаметров D_i конец этой иголки, освещенный лампочкой, играет роль подвижной светящейся метки-указателя. Местоположение лампочки и степень ее углубления в площадку должны быть такими, чтобы при перемещении движка игла проходила над колбочкой лампочки при минимальном зазоре, а острие *О* иглы при этом оказывалось над серединой нити. Отсчетная шкала, на которой отложены мантиссы десятичных логарифмов, имеет длину 25 см и разделена на 10 одинаковых больших делений, т.е. каждому большому делению соответствует 2,5 см. Большое деление, в свою очередь, разделено на 10 одинаковых средних делений, а те — еще на 5 малых делений. Поэтому, если, например, риска движка стоит против третьего малого деления, следующего после деления 5,4, то показание будет 5,46, а чтобы перевести это показание в сантиметры, надо умножить его на 2,5.

Теперь остается приготовить так называемую дифракционную структуру — стеклянную пластинку, запыленную ликоподием. В качестве подложки можно использовать отмытые от эмульсии фотопластинку или старый диапозитив или, наконец, кусок обычного оконного стекла. (Можно также нанести ликоподиевое покрытие непосредственно на стандартный светофильтр, лучше на красное стекло, сочетая в одной детали дифракционную структуру и светофильтр.) На одну из поверхностей тщательно очищенной от загрязнений пластинки наносят капельку любого жидкого масла или крошку любого жира, размазывают ее тонким слоем по всей поверхности, а затем аккуратно протирают замасленную поверхность чистой тряпочкой. В результате на поверхности остается тонкий жировой слой, который служит клейкой основой для удержания пылинок ликоподия. На подготовленную таким образом поверхность из пакетика ликоподия осторожно насыпают небольшое количество порошка. Затем пластинку наклоняют градусов на 20 – 30 и, мягко ударяя по верхнему ее краю, добиваются ссыпания порошка к противоположному краю. При этом остается широкий след в виде достаточно однородного слоя ликоподия. Изменяя наклон пластинки, повторяют эту процедуру несколько раз, пока вся поверхность пластинки не окажется покрытой подобным слоем. После этого излишки порошка ссыпают, расположив пластинку вертикально и постукивая ею несколько раз по столу или другому твердому предмету. Теперь пластинка фактически готова к использованию, но надо иметь в виду, что ликоподиевое покрытие легко стирается при малейшем его касании. Поэтому целесообразно приготовить препарат, с которым можно спокойно работать, не боясь повредить покрытие, и который можно использовать многократно. С этой целью пластинку располагают на столе покрытием вверх, накладывают на нее узкую (шириной 3 – 4 мм) рамку из ватмана по размерам пластинки, покрывают второй чистой пластинкой тех же размеров и склеивают препарат по краям полоской черной бумаги.

Итак, все узлы прибора подготовлены и можно перейти к его сборке. Проще всего воспользоваться обычным штативом из школьной лаборатории, расположив площадку на его основании и закрепив запыленную пластинку вместе с цветным стеклом в лапке штатива. Прибор готов к практическому применению — к измерению длины световой волны.

Напомним, что для определения λ по формуле (2) необходимо измерить диаметр темного дифракционного кольца D_i и расстояние L от лампочки до запыленной поверхности. Первую из этих величин измеряют как разность двух показаний риски движка на шкале при последовательном совмещении метки-указателя (острия *О*) с диаметрально противоположными точками темного кольца. Обозначим соответствующие показания по шкале через x_i' и x_i'', тогда $D_i = x_i'' - x_i'$, или, с учетом переводного коэффициента 2,5, $D_i = 2{,}5(x_i'' - x_i')$, и формула (2) принимает окончательный вид:

$$\lambda = 37{,}5\frac{x_i'' - x_i'}{k_i L}. \qquad (3)$$

Еще раз отметим, что если $x_i'' - x_i'$ выражается в делениях логарифмической шкалы, L — в сантиметрах, то λ получается в микрометрах.

Разумное расстояние L в опытах составляет 25 – 30 см. Это расстояние отсчитывают по вертикали от верхней поверхности логарифмической линейки до запыленной поверхности с помощью простой школьной линейки длиной 30 – 40 см. Измерение L проводят с точностью до 1 мм, координаты x_i также определяют с точностью до третьей значащей цифры, поэтому результаты расчетов по формуле (3) оказываются надежными и стабильными.

Два темных кольца дифракционной картины хорошо видны и в незатемненном помещении, а при небольшом затемнении нетрудно увидеть и третье темное кольцо. Если измерить диаметры трех темных колец, то можно получить три значения λ. После выполнения одной серии опытов можно поднять или опустить лапку с пластинкой и проделать несколько новых серий опытов при других значениях L.

Таким образом, с помощью подручных средств скромной домашней лаборатории можно достаточно точно измерить такую важную для физики и вместе с тем такую малую по величине оптическую характеристику, как длина световой волны.

Период гармонических колебаний

В. ЧИВИЛЁВ

В этой статье на конкретных примерах показан общий метод нахождения периода гармонических колебаний различной физической природы.

Пусть некоторая физическая величина s совершает гармонические колебания, происходящие по закону

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где A – амплитуда, ω – циклическая частота и φ_0 – начальная фаза колебаний. Легко показать, что вторая производная от s по времени t равна

$$s'' = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

С учетом уравнения (1) получаем

$$s'' + \omega^2 s = 0. \qquad (2)$$

Итак, можно сделать вывод: если величина s изменяется по гармоническому закону (1), то отсюда следует справедливость равенства (2). В математике показывается и обратное: если для величины $s = s(t)$ справедливо равенство (2) при всех допустимых значениях t, то $s(t)$ имеет вид (1) и никакой другой. Причем A и φ_0 есть произвольные постоянные, конкретные значения которых зависят от так называемых начальных условий, т.е. от значений s и ее первой производной s' в некоторый момент времени t (обычно при $t = 0$).

Равенства, связывающие функцию, ее аргумент и производные функции по этому аргументу, называются в математике дифференциальными уравнениями. Поэтому равенство (2) называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний. (Заметим, что в уравнении (2) стоит величина ω^2, которая всегда положительна. Поэтому, например, уравнение $s'' - 4s = 0$ не будет дифференциальным уравнением гармонических колебаний, так как не найдется такого действительного значения ω, для которого ω^2 было бы равно -4.)

Таким образом, мы получили чрезвычайно важное как для теории, так и для решения задач утверждение:

Если с помощью законов физики для физической величины s удалось записать дифференциальное уравнение вида $s'' + \omega^2 s = 0$, то это означает, что s изменяется по гармоническому закону $s = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ с циклической частотой ω. Конкретные значения амплитуды A и начальной фазы φ_0 зависят от начальных условий.

Это утверждение может служить правилом для нахождения периода гармонических колебаний любых конкретных колебательных систем.

Задача 1. *На легкой пружине жесткостью k подвешен груз массой m. Покажите, что вертикальные колебания такого пружинного маятника гармонические, и найдите их период.*

Направим ось X вниз (рис. 1), начало координат поместим в точку, соответствующую равновесному положению

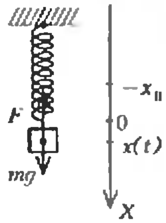


Рис. 1

груза, в котором пружина растянута по сравнению с ненапряженным состоянием на величину x_0, причем

$$kx_0 = mg.$$

В этом примере колеблющейся физической величиной является координата груза $x = x(t)$.

Первый способ решения. Используем второй закон Ньютона.

Запишем уравнение движения груза (уравнение второго закона Ньютона) в проекциях на ось X, учитывая, что проекция ускорения груза есть вторая производная x'' от координаты по времени, а проекция силы упругости, действующей на груз со стороны пружины, равна $F_x = -k(x_0 + x)$:

$$mx'' = F_x + mg, \text{ или } x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Видно, что это дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Второй способ решения. Используем закон сохранения энергии.

За нулевой уровень потенциальной энергии груза в поле тяжести удобно взять положение равновесия. Полная механическая энергия колебаний системы представляет собой сумму кинетической энергии груза $m(x')^2/2$, потенциальной энергии груза в поле тяжести $mg(-x)$ и потенциальной энергии деформации пружины $k(x_0 + x)^2/2$. Здесь x' – проекция скорости груза на ось X, ее квадрат равен, естественно, квадрату модуля скорости. Полная механическая энергия при колебаниях должна сохраняться:

$$\frac{m(x')^2}{2} + \frac{k(x_0 + x)^2}{2} - mgx = \text{const}.$$

Дифференцируем это уравнение по времени:

$$mx'x'' + k(x_0 + x)x' - mgx' = 0.$$

После простых преобразований получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний такое же, как и при первом способе решения.

Задача 2. *Покажите, что в однородном поле тяжести малые колебания математического маятника длиной l в вертикальной плоскости являются гармоническими, и найдите их период.*

За колеблющуюся физическую величину удобно взять угол α отклонения нити от вертикали (рис. 2). Будем считать α положительным, если маятник отклонен вправо от положения равновесия, и отрицательным, если он отклонен влево. Выразим кинетическую и потенциальную энергии шарика массой m в произвольный момент времени t через угол $\alpha = \alpha(t)$ и производную угла по времени $\alpha' = \alpha'(t)$.

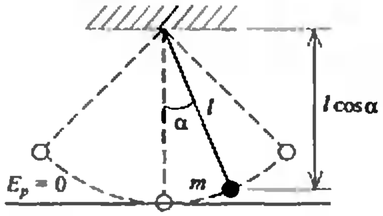


Рис. 2

Угловая скорость шарика есть α', его линейная скорость равна $v = \alpha' l$ и кинетическая энергия –

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2(\alpha')^2}{2}.$$

Если за нулевой уровень потенциальной энергии ($E_p = 0$) взять уровень, соответствующий положению шарика при равновесии маятника, то потенциальная энергия шарика в момент отклонения нити на угол α окажется

$$E_p = mg(l - l\cos\alpha) = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Для малых углов можно считать, что значения их синусов приблизительно равны самим углам (в радианах). Поэтому можно принять

$$E_p = \frac{mgl\alpha^2}{2}.$$

Полная энергия системы, равная $E_k + E_p$, при колебаниях сохраняется, следовательно,

$$\frac{ml^2(\alpha')^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} = \text{const}.$$

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\frac{ml^2\cdot 2\alpha'\alpha''}{2} + \frac{mgl\cdot 2\alpha\alpha'}{2} = 0.$$

После упрощения имеем

$$\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины α с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Итак, малые колебания математического маятника являются гармоническими с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Задача 3. *На легком стержне длиной l висит небольшой шарик массой m (рис. 3). К стержню прикреплена легкая пружина жесткостью k на расстоянии 2l/3 от точки подвеса. Другой конец пружины прикреплен к стене. Система может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси O. В положении равновесия стержень вертикален, пружина горизонтальна и не деформирована. Найдите период малых колебаний системы в плоскости чертежа.*

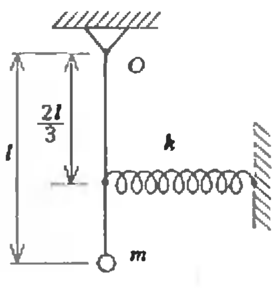


Рис. 3

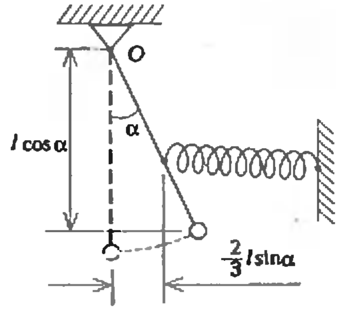


Рис. 4

Колеблющейся физической величиной будем считать угол α отклонения стержня от вертикали (рис. 4). Как и в предыдущей задаче, выразим кинетическую и потенциальную энергии системы в произвольный момент времени t через угол $\alpha = \alpha(t)$ (будем считать его малым) и производную угла по времени $\alpha' = \alpha'(t)$.

Линейная скорость шарика равна $\alpha'(t)l$, кинетическая энергия —

$$E_k = \frac{ml^2(\alpha')^2}{2}.$$

За нулевой уровень потенциальной энергии шарика возьмем уровень, соответствующий положению равновесия шарика. Тогда потенциальная энергия шарика в поле тяжести будет

$$E_{p1} = mg(l - l\cos\alpha) = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{mgl\alpha^2}{2}.$$

При отклонении маятника длина пружины сократится на $x = (2l\sin\alpha)/3 = 2l\alpha/3$ и ее потенциальная энергия станет

$$E_{p2} = \frac{kx^2}{2} = \frac{2kl^2\alpha^2}{9}.$$

Полная энергия системы, равная $E_k + E_{p1} + E_{p2}$, при колебаниях сохраняется:

$$\frac{ml^2(\alpha')^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} + \frac{2kl^2\alpha^2}{9} = \text{const}.$$

Продифференцируем это равенство по времени:

$$ml^2\alpha'\alpha'' + mgl\alpha\alpha' + 4\frac{kl^2\alpha\alpha'}{9} = 0,$$

или

$$\alpha'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{4}{9}\frac{k}{m}\right)\alpha = 0.$$

Видим, что получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний, период которых равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{g}{l} + \frac{4}{9}\frac{k}{m}}}.$$

Задача 4. *Вообразите, что вдоль диаметра Земли прорыт тоннель и в него сброшен камень. Через какое время камень окажется на противоположной стороне Земли? Сопротивление воздуха и вращение Земли не учитывать. Плотность Земли считать постоянной по всему объему, радиус Земли R = 6400 км.*

Направим ось X вдоль тоннеля и поместим начало координат в центр Земли (рис. 5). Пусть в произвольный момент времени координата камня равна x. Разобьем мысленно весь объем Земли на

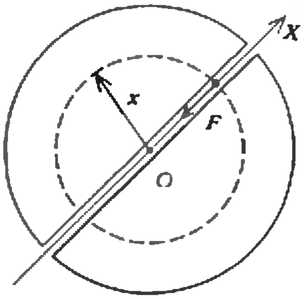


Рис. 5

тонкие сферические слои с центром в точке O. Можно показать (сделайте это самостоятельно), что любой слой с радиусом больше x действовать на камень не будет, а слои с радиусами меньше x будут действовать с силой F, равной силе притяжения между шаром радиусом x и камнем. Если плотность Земли ρ, то масса такого шара равна $4\pi x^3\rho/3$ и по закону всемирного тяготения

$$F = \frac{4}{3}G\pi\rho m x,$$

где m — масса камня, G — гравитационная постоянная. Для любого тела массой m_0 на поверхности Земли можно записать

$$m_0 g = G\frac{m_0(4\pi\rho R^3/3)}{R^2},$$

откуда

$$g = \frac{4}{3}G\pi\rho R.$$

Тогда

$$F = \frac{mg}{R}x.$$

Запишем уравнение движения камня в проекциях на ось X:

$$mx'' = -F.$$

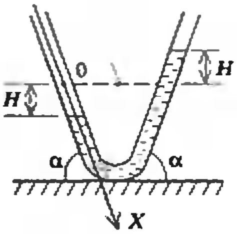


Рис. 6

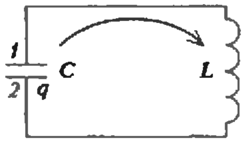


Рис. 7

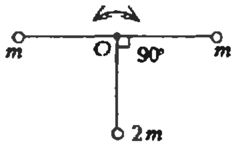


Рис. 8

Подставив сюда выражение для F и упростив, получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний для координаты x камня:

$$x'' + \frac{g}{R}x = 0.$$

Отсюда следует, что камень в тоннеле будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

и достигнет противоположной стороны Земли через время

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 42 \text{ мин}.$$

Задача 5. *Тонкая изогнутая трубка постоянного сечения расположена в вертикальной плоскости (рис. 6). Каждое колено трубки наклонено к горизонту под углом* α. *Длина части трубки, занятой жидкостью, равна* l. *Найдите период колебаний жидкости в трубке. При колебаниях опускающаяся поверхность жидкости не достигает изогнутого участка трубки. Трение между слоями жидкости и жидкости о трубку не учитывать.*

За колеблющуюся физическую величину возьмем координату x поверхности жидкости в левом колене, направив ось X вдоль колена и поместив начало координат в равновесное положение поверхности жидкости в этом колене (см. рис. 6). Пусть масса единицы длины жидкости в трубке ρ. Тогда масса всей жидкости ρl. При колебаниях скорость жидкости равна производной x' от координаты x по времени. Кинетическая энергия всей жидкости равна

$$E_k = \frac{\rho l (x')^2}{2}.$$

Теперь выразим потенциальную энергию жидкости через координату x. Если в левом колене уровень жидкости сместился вдоль трубки на x вниз, то по вертикали он опустился на $H = x\sin\alpha$ в левом колене и поднялся на H в правом. Это эквивалентно тому, что жидкость массой ρx была перенесена из левого колена в правое, поднявшись на высоту H. Потенциальную энергию жидкости в положении равновесия примем за нуль. Тогда

$$E_p = \rho x g H = \rho g x^2 \sin\alpha.$$

Полная энергия жидкости $E_k + E_p$ при колебаниях сохраняется:

$$\frac{\rho l (x')^2}{2} + \rho g x^2 \sin\alpha = \text{const}.$$

Дифференцируем уравнение по времени:

$$\rho l x' x'' + 2\rho g x x' \sin\alpha = 0.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний для величины x:

$$x'' + \frac{2g\sin\alpha}{l}x = 0.$$

Итак, колебания жидкости в трубке гармонические с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g\sin\alpha}}.$$

Задача 6. *В колебательном контуре без затухания (сопротивление равно нулю) с постоянными емкостью* C *и индуктивностью* L *происходят свободные электрические колебания. Покажите, что колебания заряда на конденсаторе и тока в контуре гармонические, и найдите их период.*

Выберем положительное направление обхода контура, например, по часовой стрелке, как показано на рисунке 7. Это означает, что ток I положителен, если его направление совпадает с положительным направлением обхода, и отрицателен, если не совпадает. Аналогичное можно сказать и про ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}$, при расчете которой по формуле $\mathcal{E} = -LI'$ автоматически будет получаться знак, согласованный с направлением обхода.

Обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, для которой $q' = I$ (для другой обкладки $q' = -I$, что не очень удобно). Для нашей схемы это нижняя обкладка. По закону Ома для участка $1L2$ можно записать

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E} = IR.$$

Поскольку в нашем контуре $R = 0$, $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$ и $\mathcal{E} = -LI' = -Lq''$, имеем

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Итак, получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины q с циклической частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Осталось выяснить, что происходит с током в контуре. Так как колебания заряда гармонические, то

$$q = q_0\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где амплитуда q_0 и начальная фаза φ_0 зависят от начальных условий. Ток связан с зарядом простым соотношением $I = q'$, поэтому

$$I = q' = -q_0\omega\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Теперь ясно, что ток в контуре изменяется тоже по гармоническому закону, причем с такими же циклической частотой ω и периодом T, как и заряд на конденсаторе.

Упражнения

1. Найдите период малых свободных колебаний в вертикальной плоскости жесткой конструкции (рис. 8) из трех легких спиц, длиной l каждая, и трех небольших по размерам шариков с массами m, m и $2m$. Конструкция может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости конструкции.

2. Решите задачу 6 статьи, используя закон сохранения энергии.

Новелла о великом олимпийце и нестандартной задаче

В.ТИХОМИРОВ

В КАЖДОМ поколении мехмата был свой олимпийский лидер. Был такой и в моем.

В его семье хранилось предание, что еще не научившись толком говорить, он на вопрос: «Кем ты собираешься стать?» — отвечал: «Алифметиком». Он стал участвовать в олимпиадах чуть ли не с пятого класса (а было это в ту пору, когда олимпиады начинались с восьмого), и решал все. И всегда. Это было что-то неслыханное.

Московские математические олимпиады проводились в ту пору в тесном единении Московского математического общества, Московского государственного университета и Мосгороно. Издержек на доброе дело не жалели, и для награждения победителей накупалась масса книг. А дальше — как в сказке про медведей — для получивших первую премию — большие-пребольшие стопки, для вторых — поменьше, для третьих — еще поменьше, а для похвальных отзывов — только одну книжицу, но и это было драгоценно. Все книжки с трогательными надписями. К ним присоединялись грамоты, подписанные знаменитыми математиками. И вручалось все это в главной мехматской аудитории в очень торжественной обстановке...

Легенда гласит, что для моего олимпийского героя (так подстроили организаторы) соорудили стопку книг выше его по росту! Но как бы то ни было, факт остается фактом, герой моего рассказа неизменно бывал победителем. По-моему, его достижения так никогда и не были перекрыты.

А затем я и мой герой поступили на мехмат, потом стали там работать. Между нами установились дружеские отношения.

Прошло много лет, мой герой стал выдающимся математиком, совершенно не утратив своей способности решать любые задачи.

А однажды случилось небольшое ЧП (дело было в середине семидесятых). Один из преподавателей, который должен был составить задачи для вступительных экзаменов, уехал в довольно длительную командировку за рубеж. Он начал работу, но кончить ее не успел. Дело было горящее: шел уже май. Меня попросили помочь. Я в принципе не возражал, но спросил, на кого еще я могу рассчитывать. Мне показали список, в котором к своему полнейшему удовольствию я нашел фамилию своего героя. И я тут же согласился.

Легкие задачи, собственно говоря, уже были составлены, но не хватало более трудных, в частности, «нестандартной» задачи. Тогда полагалось в каждом варианте иметь такую задачу.

Вы спросите: а что это такое, и зачем они нужны? Я в свое время тоже поинтересовался и получил такое объяснение.

Есть такая старая и воистину великая проблема: *можно ли тестировать таланты?*

Спортсмены — вот они считают эту проблему решенной. Я вам расскажу на этот счет одну историю.

Как-то (не буду вводить вас во все подробности) довелось мне стоять в очереди с одной девочкой, которую родители хотели записать «на гимнастику». Увидев очередь, я приуныл — она была огромной, а я терпеть не могу стоять в очередях. Но скоро я приободрился: очередь шла довольно быстро, и через полчаса, не больше, мы с девочкой оказались у «тестерши» — женщины, определявшей пригодность ребенка к занятию гимнастикой. Все произошло в одну секунду. «Тестерша» ухватила бедную девочку за мягкое место и твердо сказала: «Попа толстая, не подойдет. Следующий!»

Все это восхитило меня. Я подумал: как просто!

Однако и по сию пору достоверно неизвестно, можно или нет и нам, математикам, так же вот просто — в два счета — тестировать математическую одаренность.[1] Неясно, возможно или нет выполнить то, о чем писал когда-то Андрей Николаевич Колмогоров, а именно «тщательно взвесить, учитывая все обстоятельства экзаменационной обстановки, перспективы его (школьника) работы по избранной специальности»?

Нестандартные задачи среди других целей (не буду здесь касаться всех сторон вопроса) и были призваны тестировать математический талант. В этой нестандартной задаче должен был (по замыслу) присутствовать такой элемент, который без таланта никак не преодолеть. Значит, кто решил, тот вроде бы и есть талант.

Нестандартные задачи в листке с экзаменационными задачами ставились на последнее, пятое место. Всем было известно, что эти задачи — трудные, за них брались обычно лишь те, кто и на самом деле стремился удостовериться в своих возможностях. Но, насколько мне известно, информация о том, как были решены нестандартные задачи, гласности не предавалась. Таланты, решившие эти задачи, мне лично неизвестны.

Но вернемся к нашему герою. Мы остановились на том, что надо было среди прочего придумать нестандартную задачу. Мы назначили встречу, и я рассказал ему в общих чертах о том, чего от нас хотят. Он меланхолично спросил: «Так что же ты хочешь от меня?» Я сказал: «Нестандартную задачу», — и он, разумеется, тут же спросил: «А что это такое?» У меня были (я специально прихватил) листочки с экзаменационными задачами прошлого года. Чтобы не вдаваться в долгие объяснения, я протянул моему приятелю один такой листок и сказал: «Сочини что-нибудь в духе этой пятой задачи» (сам я ее, правда, не решал). Мой приятель согласился, а я, разумеется, поведал ему о срочности дела. Мы договорились, что мой герой позвонит мне через два-три дня.

Однако прошла целая неделя, а он хранил глухое молчание. Меня теребили, я не выдержал и позвонил ему. Когда он подошел к телефону, я спросил в некотором раздражении: «Что ж ты не звонишь? Ведь мы договорились, что ты позвонишь через пару дней?» И тут он все также меланхолично, без малейшего смущения ответил: *«А я не могу решить твою задачу.»*

Вот эта задача.

Найти все пары (x, y), удовлетворяющие условиям

$$4y^2 - 2x^2 = \sqrt{2(x+2y)^2 - (x+2y)^4},$$

$$x^4 + 2 \le 4y\left(x^2 - 1\right).$$

...Он, наверное, лукавил, мой легендарный друг. Конечно, он должен был решить ее, ибо по мнению многих и моему в том числе, не было и нет той задачи олимпиадного стиля, которую он не в силах был бы решить. На отдыхе, в спокойной обстановке (не очень, правда, скоро, но все-таки в течение часов, а

[1] *Кстати, свидетельствует ли об отсутствии гимнастических способностей толщина попы?* (Прим. ред.)

не дней) я сам решил эту задачу. Думаю, моему другу просто не захотелось почему-то ее решать, быть может, она показалась ему недостаточно эстетичной или еще почему-либо, но так или иначе этот тест он не выдержал.

А что скажете вы, читатель? Хороша ли эта задача для тестирования таланта? Порешайте!

(Кстати сказать, тогда мы с моим героем так и не справились с заданием, и нестандартную задачу составили другие специалисты.)

А если вам, как и моему приятелю, не захочется ломать себе голову над этой нестандартной «проблемой», можете прочесть мое решение (возможно, не лучшее).

Обозначим $(x+2y)^2$ через z. Функция $2z-z^2$ достигает максимума при $z=1$ и, следовательно, из первого уравнения получаем

$$4y^2-2x^2=\sqrt{2z-z^2}\le 1. \qquad (1)$$

Решая второе неравенство относительно x, будем иметь

$$x^2\le 2y+\sqrt{4y^2-4y-2}. \qquad (2)$$

Отсюда

$$4y^2\overset{(1)}{\le}2x^2+1\overset{(2)}{\le}4y+2\sqrt{4y^2-4y-2}+1,$$

что эквивалентно неравенству

$$4y^2-4y-2-2\sqrt{4y^2-4y-2}+1\le 0,$$

откуда следует, что

$$\left(\sqrt{4y^2-4y-2}-1\right)^2\le 0,$$

и значит, $4y^2-4y-2=1$, т.е. $y=-1/2$ или $y=3/2$. В первом случае из второго условия задачи (из неравенства) получаем $x^4+2x^2\le 0$, т.е. $x=0$.

Во втором случае оттуда же вытекает: $x^4-6x^2+8\le 0$, откуда $x^2\le 4$, а из первого условия задачи (уравнения) следует, что

$$9=2x^2+\sqrt{2(x+3)^2-(x+3)^4}\le 2x^2+1,$$

т.е. $x^2\ge 4$.

В итоге приходим к ответу: *имеется всего две пары чисел, удовлетворяющих условию задачи:* $(0,\ -1/2)$ *и* $(-2,\ 3/2)$.

А если вы хотите узнать мое мнение обо всем этом, то вот оно: я сомневаюсь в том, что можно коротким тестом определять возможности человека заниматься наукой. А что вы думаете по этому поводу?

Неравенство обращается в равенство

А.ЕГОРОВ

В заметке В.Тихомирова описана довольно курьезная история — первоклассный математик не смог «с ходу» решить задачу вступительного экзамена на механико-математический факультет. Было это в 1973 году. Другой замечательный математик рассказывал мне, что он узнал эту же задачу в день своего отлета из Москвы во Владивосток, решал ее в самолете, но так и не решил к окончанию более чем восьмичасового перелета.

Надо сказать, что у взрослых математиков не часто возникает желание решать задачи вступительных экзаменов. Тем более знаменателен интерес к задаче, возникший у крупного молодого математика. Это значит, что в задаче была «изюминка».

(К сожалению, в «абитуриентской» математике интересные задачи встречаются довольно редко, особенно в последние 10 — 15 лет.)

Здесь мы поговорим о задачах, близких по идее к той очень трудной математической задаче 1973 года. Такие задачи и связанные с ними соображения довольно часто встречаются в вариантах вступительных экзаменов в вузы физико-математического профиля.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6.$$

Решение. Попытки решить эту задачу «в лоб», т.е. возводя в квадрат и избавляясь от радикалов, приводят к уравнению 8-й степени, решить которое чрезвычайно трудно. Попробуем воспользоваться нехитрым наблюдением.

Левая часть уравнения $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ определена при $1\le x\le 3$, причем ее график симметричен относительно вертикали $x=2$. Хочется думать, что при $x=2$ что-то происходит. Что же? В этой точке левая часть максимальна! Докажем это. Рассмотрим квадрат левой части:

$$y^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)^2=2+2\sqrt{(x-1)(3-x)}.$$

Наше утверждение стало очевидным — квадрат положительной функции достигает максимума в точке максимума выражения, стоящего под знаком корня, т.е. при $x=2$, так как

$$(x-1)(3-x)=-3+4x-x^2=1-(x-2)^2.$$

Итак, левая часть уравнения не больше 2 и равна 2 только при $x=2$. Но правая часть не меньше 2, так как

$$x^2-4x+6=(x-2)^2+2,$$

и равна двум только при $x=2$. Задача решена.

Ответ: $x=2$.

В этом примере мы имели дело с двумя функциями, одна из которых в точке $x=2$ достигает максимума, а другая — минимума, причем максимум совпадает с минимумом. Вот о таких задачах и их модификациях мы и будем говорить.

Еще один классический пример.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\sin^5 x+\cos^3 x=1.$$

Решение. Попытки решить задачу обычными методами обречены. Попробуем угадать решения. Непосредственно видны решения, для которых $\sin x=1$ или $\cos x=1$, т.е. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $x=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Докажем, что других решений нет. Для этого достаточно убедиться, что при других значениях x левая часть меньше 1.

Предположим, что $\sin x\ne 0,\ 1$, $\cos x\ne 0,\ 1$. Тогда $\sin^5 x<\sin^2 x$, $\cos^3 x<\cos^2 x$ и

$$\sin^5 x+\cos^3 x<\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

При $\sin x=0$ или $\cos x=0$ получаем уже угаданные нами решения.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Следующая задача похожа на предыдущую.

Задача 3. *Решите систему уравнений* (n *— натуральное*)

$$\begin{cases}x+y=1,\\ x^{2n}+y^{2n}=1.\end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения видно, что $|x|\le 1$, $|y|\le 1$, но тогда из первого уравнения следует, что $x\ge 0$, $y\ge 0$. Если при этом $0<x<1$ и $0<y<1$, то $x^{2n}+y^{2n}<x+y=1$, после чего сразу получаем ответ.

Ответ: $(1;0)$; $(0;1)$.

Вот еще один пример, как бы «обратный ход».

Задача 4. *Решите неравенство*

$$-x-y^2-\sqrt{x-y^2-1}\ge -1.$$

Решение. Непосредственно видно, что $x\ge y^2+1$, т.е. $x>1$ при $y\ne 0$. Но тогда $-x<-1$ и левая часть неравенства меньше правой. Итак, y=0, x=1.

Ответ: (1;0).

Рассмотрим теперь систему уравнений.

Задача 5. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}x+y+z=2,\\2xy-z^2=4.\end{cases}$$

Решение. Здесь два уравнения и три неизвестных. Попробуем выразить y через z и x и подставить во второе уравнение:

$$y=2-(x+z),$$

$$2(2-(x+z))x-z^2=4,$$

$$4x-2x^2-2xz-z^2=4,$$

откуда $(x-2)^2+(x+z)^2=0$.

Но это значит, что $x=2$, $z=-x=-2$, $y=2$.

Ответ: (2, 2, −2).

Вот еще одна задача, где число неизвестных больше числа уравнений.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=7.$$

Решение. Каждый из сомножителей в левой части — квадратный трехчлен, первый — относительно x^2, второй — относительно y^2. Следовательно, сомножители минимальны, если $x^2=1$, $y^2=3/2$. Так как оба сомножителя положительны при всех x и y, минимум произведения достигается, когда минимальны сомножители, и при этом равен 7.

Ответ: четыре решения: $\left(\pm 1;\pm\sqrt{3/2}\right)$.

Задача 7. *Найдите все решения системы неравенств*

$$\begin{cases}x^2-6x+6y\le 0,\\y^2-2xy+9\le 0.\end{cases}$$

Решение. Складывая неравенства, получаем после преобразований неравенство

$$(x-y)^2-6(x-4)+9\le 0,$$

или

$$(x-y-3)^2\le 0.$$

Последнее значит, что $x-y=3$ и, кроме того, все неравенства превращаются в равенства (если хотя бы одно из неравенств будет строгим, то строгим неравенством будет и их сумма, а это невозможно — квадрат не может быть отрицательным). Итак, $y=x-3$, $x^2-6x+6y=0$, т.е. $x^2=\pm 3\sqrt2$, $y=-3\pm 3\sqrt2$.

Ответ: $\left(3\sqrt2,\ 3\sqrt2-3\right)$, $\left(-3\sqrt2,\ -3\sqrt2-3\right)$.

Наконец, одна из мехматских систем 1973 года.

Задача 8. *Решите систему*

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac12(x-y)^2-(x-y)^4}=y^2-2x^2,\\ y\ge 4x^4+4yx^2+\dfrac12.\end{cases}$$

Решение. Пусть $t=(x-y)^2$. Левая часть первого уравнения переписывается так: $f(t)=\sqrt{\frac12 t-t^2}$. Подкоренное выражение — квадратный трехчлен, достигающий максимума в вершине, т.е. при $t=\frac14$. При этом

$$\max f(t)=\sqrt{\frac12\cdot\frac14-\frac1{16}}=\frac14.$$

Запишем теперь вместо первого уравнения неравенство (это — решающий шаг!):

$$y^2-2x^2\le\frac14.$$

Складывая полученное неравенство со вторым неравенством системы, приходим к неравенству

$$y+\frac14\ge 4x^4+4yx^2+\frac12+y^2-2x^2.$$

Преобразуем это неравенство так:

$$0\ge\left(2x^2+y\right)^2-\left(2x^2+y\right)+\frac14,$$

или

$$\left(2x^2+y-\frac12\right)^2\le 0.$$

Отсюда следует, что, во-первых, $2x^2+y-1/2=0$ и, во-вторых, все ранее написанные неравенства на самом деле являются равенствами, причем $t=(x-y)^2=1/4$. Итак, мы приходим к такой системе уравнений:

$$\begin{cases}y^2-2x^2=\dfrac14,\\2x^2+y=\dfrac12,\\(x-y)^2=\dfrac14,\end{cases}$$

решая которую, получаем ответ.

Ответ: (0, 1/2), (−1, −3/2).

Приведем еще пример сходной задачи с параметром.

Задача 9. *При каких значениях a система неравенств*

$$\begin{cases}x\ge(y-a)^2,\\y\ge(x-a)^2\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Из условия следует, что если (x_0,y_0) — решение данной системы, то (y_0,x_0) — тоже ее решение. Поэтому, если решение единственно, то $x_0=y_0$. Следовательно, должно быть единственным решение неравенства

$$x\ge(x-a)^2,$$

или, что то же самое:

$$x^2-(2a+1)x+a^2\le 0.$$

Но это означает, что дискриминант квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства должен быть равен нулю:

$$(2a+1)^2-4a^2=0,$$

т.е. $a=-1/4$.

Осталось убедиться в том, что при $a=-1/4$ наша система имеет единственное решение.

Подставляя $a=-1/4$ и складывая неравенства системы, приходим к неравенству

$$x+y\ge y^2+\frac y2+\frac1{16}+x^2+\frac x2+\frac1{16},$$

или, после преобразований,

$$\left(y-\frac14\right)^2+\left(x-\frac14\right)^2\le 0,$$

откуда видим, что $x=y=1/4$ — единственное решение системы.

Ответ: $a=-1/4$.

Приведем еще две задачи, решая которые мы будем оценивать максимумы и минимумы некоторых тригонометрических выражений, пользуясь алгебраическими неравенствами.

Задача 10. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x=2\sin^2y,\\\sin^2y+\cos^2z=1.\end{cases}$$

Решение. Пусть $\operatorname{tg}^2x=t>0$, тогда $\operatorname{ctg}^2x=1/t$, но $t+1/t\ge 2$, ибо последнее неравенство равносильно такому: $(t-1)^2/t\ge 0$ (равенство возможно лишь при t=1). Итак, левая часть первого уравнения не меньше 2, а правая не больше. Поэтому

$$\operatorname{tg}^2x=1,\ \sin^2y=1,\ \cos^2z=0.$$

Ответ:

$$\left(\pm\frac\pi4+\pi k,\ \frac\pi2(2l+1),\ \frac\pi2(2m+1)\right),\ k,l,m\in\mathbf Z.$$

Задача 11. *Решите уравнение*

$$\operatorname{tg}^4x+\operatorname{tg}^4y+2\operatorname{ctg}^2x\operatorname{ctg}^2y=3+\sin^2(x+y).$$

Решение. Пусть $a=\operatorname{tg}^2x$, $b=\operatorname{tg}^2y$. Тогда левая часть уравнения приводится к виду

$$a^2+b^2+\frac2{ab}=$$
$$=(a-b)^2+2ab+\frac2{ab}\ge(a-b)^2+4$$

(мы снова воспользовались неравенством $t+1/t\ge 2$).

Это значит, что левая часть не меньше 4 и равна 4 при $a=b$ и $ab=1$. Но правая часть не больше 4 и равна 4 лишь при $\sin^2(x+y)=1$. Осталось решить систему $\sin^2(x+y)=1$, $\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}^2y$, $\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}^2y=1$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}\right)$, где $m+n$ — четное число, $m,n\in\boldsymbol{Z}$.

Довольно часто встречаются задачи, требующие преобразования выражения $f(x)=a\sin x+b\cos x$ с помощью введения вспомогательного угла. Напомним, как это делается.

Умножим и разделим $f(x)$ на $\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\times$$

$$\times\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Рассмотрим точку с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Эта точка лежит на единичной окружности, и потому существует единственный угол $0\le\varphi<2\pi$ такой, что $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi=$ $=b/\sqrt{a^2+b^2}$. Поэтому

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

Это сразу дает оценку

$$|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}, \qquad (*)$$

причем равенство достигается при x, для которых $\sin(x+\varphi)=1$ или $\sin(x+\varphi)=$ $=-1$, т.е. при $x=-\varphi\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Рассмотрим задачу, использующую этот прием.

Задача 12. *Решите уравнение*

$$\sin 3x-2\sin 18x\sin x=$$

$$=3\sqrt2-\cos 3x+2\cos x.$$

Решение. Перепишем наше уравнение так:

$$\sin 3x+\cos 3x-$$

$$-2(\sin 18x\sin x+\cos x)=3\sqrt2.$$

В силу $(*)$

$$|\sin 3x+\cos 3x|\le\sqrt2$$

(здесь $a=1$, $b=1$, $\varphi=\pi/4$);

$$2|\sin 18x\sin x+\cos x|\le$$

$$\le 2\sqrt{1+\sin^2 18x}\le 2\sqrt2$$

(здесь $a=\sin 18x$, $b=1$).

Из этих неравенств следует, что модуль левой части не больше чем $3\sqrt2$ и может быть равен $3\sqrt2$ лишь при $\sin^2 18x=1$, т.е. если $\sin 18x=1$ либо $\sin 18x=-1$.

Для того чтобы левая часть была равна правой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases}\sin 3x+\cos 3x=\sqrt2,\\ \sin 18x=1,\\ \sin x+\cos x=\sqrt2,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sin 3x+\cos 3x=\sqrt2,\\ \sin 18x=-1,\\ -\sin x+\cos x=-\sqrt2.\end{cases}$$

Решим первую систему. Третье уравнение — самое простое. Поэтому сначала решим его, а затем выясним, какие из полученных решений удовлетворяют остальным двум уравнениям.

Его решение получить легко, так как

$$\sin x+\cos x=\sqrt2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt2.$$

Имеем

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

т.е.

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,$$

но при этом

$$\sin 3x+\cos 3x=\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$$

и значит, эти значения x не удовлетворяют системе, т.е. первая система решений не имеет.

Для второй системы получаем аналогично

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

т.е.

$$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n.$$

Но тогда

$$\sin 3x+\cos 3x=\sin\frac{9\pi}{4}+\cos\frac{9\pi}{4}=\sqrt2$$

и

$$\sin 18x=\sin\frac{27\pi}{2}=-1,$$

т.е. найденные x удовлетворяют второй системе и, следовательно, исходному уравнению.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Рассмотрим напоследок еще один пример.

Задача 13. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{3}{2}\pi x}\,\sin\pi x-\cos\pi x=2.$$

Решение. Пусть $A=\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}$. Оценивая левую часть уравнения:

$$|A\sin\pi x-\cos\pi x|\le\sqrt{A^2+1}=$$

$$=\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}},$$

видим, что она не превосходит 2 и равна 2 лишь при $\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}=0$, т.е. при

$$x=\frac{2n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}. \qquad (**)$$

При таких x уравнение принимает вид

$$\sqrt3\sin\pi x-\cos\pi x=2$$

(мы умышленно не подставляем вместо x уже найденные значения).

Решая полученное уравнение, находим, что

$$\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=1,$$

или

$$x=\frac{2}{3}+2m,\ m\in\boldsymbol{Z};$$

и, вспоминая $(**)$, получаем

$$\frac{2n}{3}=\frac{2}{3}+2m,$$

или

$$n=3m+1.$$

Итак, окончательно, $x=\frac{2}{3}(3m+1)$, где $m\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{2}{3}+2m$, $m\in\boldsymbol{Z}$.

В заключение предлагаем вам решить следующие упражнения.

Упражнения

1. Решите уравнения и системы:

а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}=3x^2-12x+16$;

б) $\sin^{13}2x+\cos^{12}2x=1$;

в) $\sin x+\sin 9x=2$;

г) $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}=0$;

д) $\begin{cases}x+y+z=\sqrt3,\\ x^2+y^2+z^2=1;\end{cases}$

е) $(x^2-2x+3)(y^2+6y+12)=6$;

ж) $2^{|x|}-\cos y+\lg(1+x^2+|y|)=0$;

з) $\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2+\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2=$ $=12+\frac{1}{2}\sin y$.

2. При каких a система имеет единственное решение:

а) $\begin{cases}y\ge x^2+2a,\\ x\ge y^2+2a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y+z=a,\\ x^2+y^2=z?\end{cases}$

3. Найдите все пары чисел (x,y), удовлетворяющие условиям

а) $\begin{cases}y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2},\\ 4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\ge 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt{2x^2y^2-x^4y^4}=y^6+x^2(1-x),\\ \sqrt{1+(x+y)^2}+x(2y^3+x^3)\le 0.\end{cases}$

4. Решите уравнения

а) $2\sqrt3\sin 5x-\sqrt3\sin x=$ $=\cos 24x\cos x+2\cos 5x-6\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$;

б) $\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 2\pi x}\,\cos\pi x+\sin\pi x=\sqrt2$.

5. Для каждого значения b решите уравнение

$$3\cos x\sin b-\sin x\cos b-4\cos b=3\sqrt3.$$

Варианты вступительных экзаменов 1995 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Через вершины A, B и C трапеции $ABCD$ $(AD \| BC)$ проведена окружность. Известно, что окружность касается прямой CD, а ее центр лежит на диагонали AC. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 2$, $AD = 8$.

2. Решите уравнение

$$\log_3(\sin 3x - \sin x) = 2\log_9(17\sin 2x) - 1.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина гипотенузы AB, а медианы треугольника пересекаются в точке E. Треугольник ABC расположен на координатной плоскости Oxy так, что точка A лежит на оси Oy, точка D симметрична точке C относительно оси Oy, а точки C, D и E лежат на графике функции $y = (x^2 - 5)^2$. Найдите уравнение прямой CD и площадь треугольника ABC.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 3\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 8. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку A, а другая — через точки B и D, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SC плоскости сечений? Найдите расстояние между плоскостями сечений и объемы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями.

5. Найдите все значения параметра p, при которых сумма всех корней уравнения

$$\left(x - \frac{9}{4}p\right)^4 - 4p(p-1)\left(x - \frac{9}{4}p\right)^2 - p^3(2p-3) = 0$$

меньше $-5p^2 + 11p + 7$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\dfrac{2\sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = 1$.

2. Решите неравенство $\log_{1+\frac{6}{25}x} x - 2\log_x\left(1 + \frac{6}{25}x\right) > 0$.

3. Через середину гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая катет BC в точке D, а продолжение катета AB за точку A — в точке E. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD = 1$, $AE = 2$, $\angle CAB = \arccos\frac{3}{5}$.

4. Парабола Π_2 симметрична параболе Π_1 с уравнением $y = ax^2$, $a < 0$, относительно точки $N(b; ab^2)$, где $b > 0$. Некоторая прямая пересекает каждую из парабол ровно в одной точке: Π_1 — в точке B_1, Π_2 — в точке B_2 так, что угол B_1B_2N — прямой. Касательная к параболе Π_1, проведенная в точке B_1, пересекает отрезок B_2N в точке L. Определите, в каком отношении точка L делит отрезок B_2N. Найдите значения параметров a и b, при которых длина отрезка B_1L минимальна, если площадь треугольника B_1B_2N равна $\frac{1}{3}$.

5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно $\sqrt{14}$, длина стороны основания $ABCD$ призмы равна 6. Окружность основания прямого кругового конуса вписана в треугольник BC_1D, а вершина конуса лежит в плоскости ABC_1. Найдите объем конуса.

Вариант 3

1. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором выполняется равенство

$$\sin(n^\circ + 80^\circ) + \sin(n^\circ - 40^\circ) + \sin(n^\circ + 70^\circ) - \cos 25^\circ = 0.$$

2. Решите неравенство $5 - 3\left|3^x - 1\right| < \sqrt{10 - 3^{x+1}}$.

3. В равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$ вписана окружность с центром O. Касательная к окружности пересекает стороны BC и CA треугольника в точках M и N соответственно. Найдите радиус окружности, если $\angle MNC = 2\angle NMC$, $OM = \sqrt{10}$, $ON = \frac{15}{4}$.

4. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{y-x}(2y - 2xy) \le 2, \\ |x| \le 4 - y. \end{cases}$$

Изобразите фигуру Φ и найдите ее площадь.

5. На ребре AC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка K так, что $AK = \frac{1}{4}$, $CK = \frac{3}{4}$. Через точку K проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{7}{6}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найдите объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Призма находится на горизонтальной поверхности шероховатого стола (рис. 1). На поверхность призмы, наклоненную под углом α к горизонту, положили брусок массой m и отпустили. Он стал соскальзывать, а призма осталась в покое. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой μ. Найдите силу трения между призмой и столом.

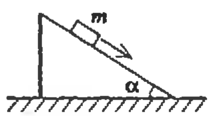


Рис. 1

2. В вакуумной теплоизолированной камере находятся два пузыря одинаковых размеров, один из которых наполнен гелием, а другой водородом, оба до давления p_0. Найдите отношение давления, установившегося в камере после того, как пузыри лопнули, к начальному давлению газа в пузырях. Отношение температуры гелия к темпера-

туре водорода составляет $T_1/T_2 = 0{,}6$. Молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме равна $C_{V_1} = (3/2)R$, водорода — $C_{V_2} = (5/2)R$, где R — газовая постоянная. Объем пузыря в 160 раз меньше объема камеры. Изменением поверхностной энергии пленок при разрыве пузырей пренебречь.

3. Какое количество теплоты выделится в схеме (рис. 2) после размыкания ключа K? Параметры схемы показаны на рисунке.

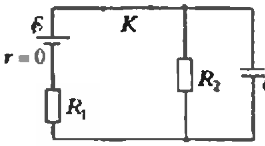


Рис. 2

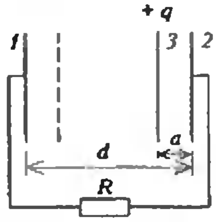


Рис. 3

4. Между двумя неподвижными плоскопараллельными незаряженными пластинами 1 и 2 (рис. 3), закороченными через резистор R, помещают аналогичную проводящую пластину 3 с положительным зарядом q на расстоянии a от пластины 2 ($a < d/2$, где d — расстояние между пластинами 1 и 2). После установления равновесного состояния пластину 3 быстро перемещают в симметричное положение — на расстоянии a от пластины 1. Полагая, что за время перемещения пластины 3 заряды на пластинах 1 и 2 не успевают измениться, определите: 1) величину и направление тока через резистор сразу после перемещения пластины 3; 2) количество теплоты, выделившееся на резисторе после перемещения пластины. Площадь каждой пластины S, расстояние между пластинами мало по сравнению с линейными размерами пластин.

5. Маленький воздушный пузырек всплывает по оси прямоугольного сосуда (рис. 4), заполненного прозрачной жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}4$. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 24$ см его изображение наблюдают на экране Э. Скорость перемещения изображения пузырька на экране в момент пересечения главной оптической оси линзы равна $v = 80$ см/с. Определите скорость пузырька. Линейные размеры: $l = 56$ см, $L = 10$ см.

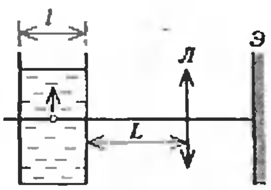


Рис. 4

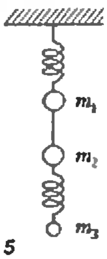


Рис. 5

Вариант 2

1. Шары с массами m_1, m_2 и m_3 подвешены к потолку с помощью двух невесомых пружин и легкой нити (рис. 5). Система покоится. 1) Определите натяжение нити. 2) Определите ускорение (направление и модуль) шара массой m_1 сразу после пережигания нити.

2. На диаграмме зависимости давления p от объема V для некоторой массы идеального газа (рис. 6) две изотермы пересекаются двумя изобарами в точках 1, 2, 3 и 4. Найдите отношение температур в точках 3 и 1, если отношение объемов в этих точках равно $V_3/V_1 = \alpha$. Объемы газа в точках 2 и 4 равны.

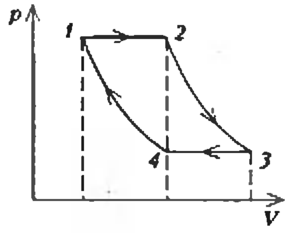


Рис. 6

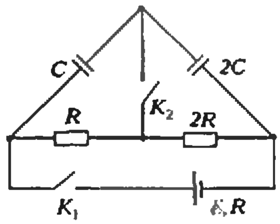


Рис. 7

3. В схеме (рис. 7) ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключ K_1 замыкают, оставляя K_2 разомкнутым. В результате на конденсаторе емкостью C устанавливается напряжение $U_1 = 6$ В. 1) Найдите ЭДС источника тока. 2) Каким станет установившееся напряжение на конденсаторе емкостью C после замыкания ключа K_2 при замкнутом K_1?

4. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см расположено плоское зеркальце на расстоянии $L = 3F$ от линзы (рис. 8). Зеркальце вращается с угловой скоростью $\omega = 0{,}1$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку A. На расстоянии $a = 5F/4$ от линзы расположен точечный источник света S.

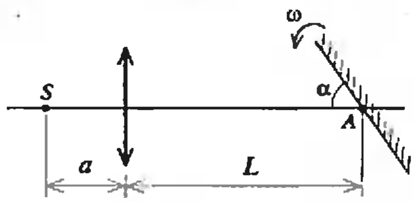


Рис. 8

1) На каком расстоянии от точки A получится изображение источника в системе линза — зеркальце в результате однократного прохождения лучей от источника через линзу? 2) Найдите скорость (модуль и угол между направлением скорости и главной оптической осью) этого изображения в момент, когда угол между плоскостью зеркальца и главной оптической осью равен $\alpha = 60°$.

5. В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд q, равный по модулю заряду электрона, равномерно распределен внутри шара радиусом R. Чему будет равен период колебаний (внутри шара, вдоль его диаметра) электрона, помещенного в такой шар? Масса электрона m.

Вариант 3

1. Горизонтально расположенный закрытый цилиндрический сосуд с гладкими стенками разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две части, в которых находятся различные идеальные газы с одной и той же температурой $T_0 = 300$ К. Объем, занимаемый одним из газов, в $\alpha = 3$ раза больше объема, занимаемого другим газом. Газ в большем объеме нагревают, и его объем увеличивается на $\beta = 1/20$ объема всего сосуда. На сколько увеличилась температура этого газа, если температура в другой части сосуда поддерживается постоянной и равной T_0?

2. Луна движется вокруг Земли с периодом $T = 27{,}3$ суток по орбите, которую можно считать круговой. Радиус Земли $R = 6400$ км. Ускорение свободного падения на

поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2. Определите по этим данным расстояние между Землей и Луной.

3. В фокальной плоскости тонкой рассеивающей линзы на расстоянии $h = 2$ см от ее главной оптической оси расположен точечный источник света S (рис. 9). Угол между двумя лучами, один из которых параллелен главной оптической оси, равен $\alpha = 0{,}08$. 1) Найдите угол β между этими лучами после преломления в линзе. 2) На каких расстояниях от линзы и от главной оптической оси получится изображение источника? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. Считать, что углы α и β малы и $h \ll F$.

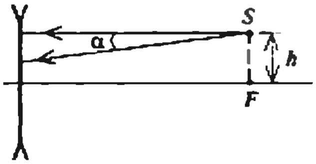


Рис. 9

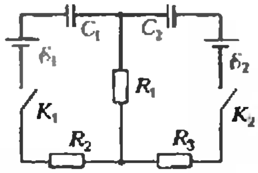


Рис. 10

4. Две батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ включены в схему, параметры которой указаны на рисунке 10, причем $R_1 = R_2 = R_3 = R$. В начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, конденсаторы не заряжены. Ключи одновременно замыкают. 1) Найдите начальный ток через резистор R_1. 2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключей? Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

5. На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое непроводящее кольцо массой m, вдоль которого равномерно распределен заряд Q. Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Внешнее магнитное поле выключают. 1) По какой причине (укажите механизм) кольцо начнет вращаться? 2) Найдите угловую скорость вращения кольца после выключения магнитного поля.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, В.Можаев

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

(досрочный экзамен)

1. Решите неравенство $\log_5(6\cdot 5^{x+1}-5) < 2x+2$.

2. Ремонт пути производили две бригады. Каждая из них отремонтировала по 10 км, причем вторая бригада работала на один день меньше первой. Сколько километров пути ремонтировала каждая бригада за один день, если вместе они ремонтировали в день 4,5 км?

3. Решите уравнение $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{\cos 3x} = 1$.

4. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, плоский угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды.

5. Может ли функция $y = 2\cos x - \cos 2x$ принимать:
а) значение -3, б) значение 3? Определите все значения, которые может принимать эта функция.

Вариант 2

(основной экзамен)

1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{5x+3}{3x-1}\right) > -2$.

2. Решите уравнение $2 - \dfrac{3a-2}{(x-1)(x+a)} = \dfrac{3x-a}{x+a}$.

3. Решите уравнение $3\cos x - \sin x = \sqrt{3\cos 2x + 2\sin 2x}$.

4. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите площадь сечения, если ребро основания пирамиды равно a и боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α.

5. Три натуральных числа составляют геометрическую прогрессию с суммой 129. Если, не меняя первое число, увеличить знаменатель прогрессии на 2, то ее сумма увеличится менее чем в 2 раза. Если же знаменатель увеличить на 5, сумма возрастет более чем втрое. Найдите эти числа.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело, брошенное с вышки высотой $h = 10$ м, упало на землю со скоростью, равной $v = 15$ м/с и направленной под прямым углом к начальной скорости. Определите время падения. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Невесомый блок (рис. 1) подвешен при помощи невесомой нити и двух пружин жесткостью k_1 и k_2. На какое расстояние опустится блок, если к его оси приложить силу F?

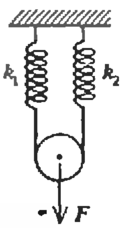


Рис. 1

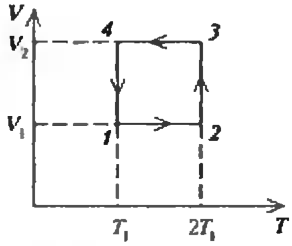


Рис. 2

3. Тело бросили со скоростью $v_0 = 1$ м/с с высоты $h = 5$ м, и оно попало в ящик с песком, который двигался по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $u = 5$ м/с. Определите, под каким углом к горизонту упало тело, если после удара скорость ящика не изменилась. Сопротивление воздуха не учитывать.

4. Над одним молем идеального газа совершают цикл, показанный на рисунке 2. Определите КПД цикла, если работа газа на участке *2–3* равна $A_{23} = 2$ кДж, а на участке *1–4* работа равна $A_{14} = 1{,}5$ кДж. Температура $T_1 = 300$ К, газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

5. В двух сосудах объемами $V_1 = 1$ л и $V_2 = 2$ л содержится один и тот же газ с одной и той же концентрацией молекул. В первом сосуде температура $T_1 = 300$ К, во втором — $T_2 = 350$ К. Определите, какая установится температура, если сосуды привести в тепловой контакт. Теплообмена с окружающей средой нет.

6. На расстоянии r_1 от центра уединенного заземленного металлического шара радиусом R находится заряд q. Определите, какой заряд протечет по заземляющему проводнику, если заряд переместить на расстояние r_2 от центра шара.

7. Источник тока с внутренним сопротивление $r_1 = 1{,}5$ Ом замкнут на резистор, сопротивление которого равно внутреннему сопротивлению источника. Когда в цепь последовательно подключили второй источник тока с ЭДС, равной ЭДС первого, то сила тока в цепи не изменилась. Определите внутреннее сопротивление второго источника тока.

8. Катушка индуктивности площадью $S = 4$ см^2, содержащая $N = 500$ витков толстого провода, подключена к конденсатору емкостью $C = 20$ нФ и помещена в однородное магнитное поле, индукция которого равна $B = 2$ мТл и параллельна оси катушки. Определите максимальный ток в катушке, если конденсатор зарядился до напряжения $U = 100$ В, когда магнитное поле выключили.

9. Из шара радиусом $R = 4$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = 1{,}4$, вырезан сегмент, на плоскую границу которого нормально падает из воздуха параллельный пучок света. Определите диаметр основания сегмента, если полного внутреннего отражения света не наблюдается.

10. Катод вакуумного фотоэлемента освещается лучом лазера, работающего на длине волны $\lambda = 630$ нм и дающего мощность излучения $P = 4$ мВт. Определите величину силы тока насыщения фотоэлемента. Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3\cdot10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Публикацию подготовили
Ю.Сезонов, В.Тонян

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 600 км. В то время, за которое первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найдите скорости мотоциклистов, считая их движение равномерным, если первый мотоциклист проходит путь до пункта B на 3 часа быстрее, чем второй до пункта A.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A, D_1 и середину ребра BB_1 проведена плоскость. Найдите отношение объемов фигур, на которые эта плоскость делит куб.

3. Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа, чтобы произведение куба уменьшаемого на вычитаемое было наименьшим?

4. Решите уравнение $\sqrt{1-\sin^2 x}+\dfrac{1}{2\operatorname{tg} x}=0$.

5. Решите уравнение $\frac{1}{2}\log_2(x-4)+\frac{1}{2}\log_2(2x-1)=\log_2 3$.

Вариант 2

(математический факультет)

1. По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадения точек происходят через каждую минуту. Определите скорости точек.

2. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат со стороной 1. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Через ребро AD проведена плоскость, перпендикулярная прямой SB. Найдите объем части пирамиды, заключенной между этой плоскостью и основанием.

3. Разность двух положительных чисел равна 13,75. Каковы должны быть эти числа, чтобы разность между удвоенным квадратом большего числа и кубом меньшего числа была наибольшей?

4. Решите уравнение $\sqrt{1+\sin 2x}+\cos 2x=0$.

5. Решите уравнение $\lg(3x-7)+\lg 2=\lg(x+3)+\lg(x-3)$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом α. Среднее по величине боковое ребро равно l. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

2. Упростите выражение

$$\frac{(2x-1)^{-\frac{1}{2}}+(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{(2x+1)^{-\frac{1}{2}}-(2x-1)^{-\frac{1}{2}}}:\frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{(2x-1)(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(2x+1)(2x-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

3. Решите неравенство $\dfrac{x^2(x-3)}{x-4}<0$.

4. Решите уравнение $\log_{25}\left(5\log_3\left(2-\log_{25} x\right)\right)=\frac{1}{2}$.

5. Решите уравнение $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Вычислите $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$.

2. Вычислите $\log_6 16$, если $\log_{12} 27=a$.

3. Решите неравенство $\sqrt{x+4}>x-2$.

4. Решите неравенство $\log_{x^2-3}<-3$.

5. Решите неравенство $\log_2\dfrac{4|x|-2}{3}<1$.

6. Решите уравнение $\sqrt{4x-1}-\sqrt{x-2}=3$.

7. Решите уравнение $|1+3x|-|x-1|=2-x$.

8. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямой $3x-y+6=0$ и осями координат.

9. Найдите все точки плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $|x+y|=y$.

10. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{x+8}}{\log_{0,3}\left(x^2+1{,}5x\right)}.$$

11. На кривой $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-x+1$ найдите точки, в которых касательная к кривой параллельна прямой $y=2x-1$.

12. При каких значениях m график функции $y=(m+5)x^2+x+m-3$ пересекает ось абсцисс по разные стороны от оси ординат?

13. Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=\dfrac{2}{3+2x}$ при $x\geq0$ и $f(x)$ — четная функция.

14. Постройте график функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\left|\log_{1/3} x\right|}$.

15. Постройте график функции $y=\left|-4x^2+8|x|-3\right|$.

Публикацию подготовили
В.Костицын, Б.Кукушкин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Выбор ответа определяется удобством использования той или иной системы отсчета. 2. Определенный ответ дать нельзя, если не указать систему отсчета. 3. а) Окружность; б) винтовая линия. 4. Если дождь падает отвесно относительно земли, то поезд движется вправо. Если струи дождя наклонны к земле, требуется расчет относительной скорости капли и вагона. Может быть случай, когда вагон покоится. 5. Знак ускорения зависит от выбора направления оси координат и все время движения одинаков. 6. Да, если хотя бы один из источников дыма движется (рис. 1). 7. Это возможно при сверхзвуковых скоростях движения самолета, если снаряд и самолет движутся в одну сторону (тогда их относительная скорость может быть близка к нулю). 8. Двигаться вниз со скоростью 1,5 м/с. 9. $v_{\text{ве}} = v_{\text{в}}$.

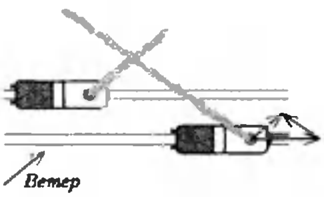


Рис. 1

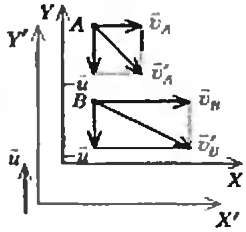


Рис. 2

10. Да, могут (рис. 2). Скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ заданы в неподвижной системе координат XY, скорости $\vec{v}\,'_A$ и $\vec{v}\,'_B$ — в движущейся со скоростью $\vec{u}$ системе $X'Y'$. Так как векторы $\vec{v}\,'_A$ и $\vec{v}\,'_B$ не параллельны, прямые, по которым точки A и B движутся в системе $X'Y'$, будут пересекаться.

11. В движущейся воде все обстоит так же, как и в неподвижной, т.е. от гребца потребуются одинаковые усилия.

12. Подъемная сила самолета тем больше, чем больше его скорость относительно воздуха. При взлете и посадке против ветра необходимая скорость относительно воздуха достигается при меньшей скорости относительно земли, что выгоднее и безопаснее.

13. Ветер увеличивает скорость самолета относительно земли на первой половине маршрута, т.е. помогает полету меньшую часть времени. На второй половине ветер уменьшает скорость относительно земли, т.е. мешает большую часть времени. Следовательно, рекорд ухудшится.

14. Для наблюдателя A все окружающее пространство вращается вокруг оси O с такой же, как платформа, угловой скоростью, но в противоположном направлении. Поскольку наблюдатель B находится от оси O вдвое дальше, его линейная скорость относительно наблюдателя A будет вдвое больше, т.е. 2 м/с.

15. Кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета. Например, если мальчик выстрелит против хода поезда, то относительно земли кинетическая энергия пули будет равна нулю.

16. Солнце сообщает одно и то же ускорение и грузу, и Земле. Поскольку отсутствует относительное ускорение тел, отвес не будет отклоняться от местной вертикали.

17. Движущиеся полосы — не материальные тела, поэтому теория относительности никаких ограничений на их скорость не накладывает.

18. Скорость наблюдаемого света всегда равна 300000 км/с. Правда, изменятся цвет приходящего от квазара света.

Микроопыт

Относительная скорость движения поездов больше скорости вашего поезда относительно земли.

Замечательный четырехвершинник

1. *Рассмотрим четырехвершинник* $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Из равенства (1) статьи следует

$$BD|\cos\angle D| = \frac{|I|}{AC} = \frac{\left|AB^2 + (AC - AD)^2 - BC^2 - AD^2\right|}{2AC}.$$

2. Считая BC и AD диагоналями четырехвершинника $ABCD$ и пользуясь равенством (1), получим

$$BC = \frac{I}{AD} = \frac{AC^2 - AB^2}{AD}.$$

3. Из равенства (1) с учетом теоремы Птолемея получим

$$\varphi = \arccos\frac{I}{ef} = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2(ac + bd)}.$$

4. Рассмотрим четырехвершинник $ABCD$ (рис.3). По свойству биссектрисы $AD = ka$, $DC = kb$. Из неравенства (6) статьи следует $(ka + kb)\cdot BD \le a\cdot kb + b\cdot ka$, откуда $BD \le 2ab/(a+b)$.

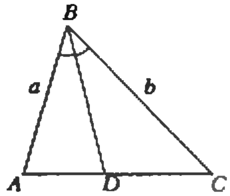


Рис. 3

5. Рассмотрим четырехвершинник $ABCD$ и воспользуемся теоремой (1) и неравенством (6):

$$|\cos\angle AND| = \frac{\left|b^2 + d^2 - a^2 - c^2\right|}{2ef} \ge \frac{\left|b^2 + d^2 - a^2 - c^2\right|}{2(ac + bd)} = \frac{5}{11}.$$

Период гармонических колебаний

1. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{g}}$.

Неравенство обращается в равенство

1. а) 2, б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi k}{2}$, в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, г) $(0;1)$, д) $x = y = z = 1/\sqrt{3}$, е) $(1;-3)$, ж) $(0;0)$, з) $\left(\frac{\pi}{4}(2n+1), \frac{\pi}{2}(4k+1)\right)$; $n, k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Левая часть равна $\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^2 2x}\right)$ и принимает наименьшее значение при $\sin^2 2x = 1$.

2. $a = 1/8$. а) Если решение единственно, то $x = y$ и неравенство $x^2 - x + 2a \le 0$ имеет единственное решение. б) $a = -1/2$.

3. а) $(-1/2;1)$, б) $(1;-1)$. 4. а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, б) $\frac{1}{4} + 2n$.

5. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ при $b = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; при $b = -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$; $n, k \in \mathbf{Z}$.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $10\sqrt{3}$. 2. $\pi + \arccos 1/6 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. CD : $y = 16$, $S = 18\sqrt{3}$. *Решение.* По условию точки C и D симметричны относительно оси Oy, поэтому они имеют координаты $C(x_0, y_0)$, $D(-x_0, y_0)$. Тогда точка E пересечения медиан треугольника имеет координаты $E(-x_0/3, y_0)$, так как $CD = 2DE$. Точки C и E лежат на графике, поэтому

$$y_0 = \left((-x_0/3)^2 - 5\right)^2 = \left((x_0)^2 - 5\right)^2,$$

откуда $x_0 = \pm 3$, $y_0 = 16$.

Далее, по свойству медианы прямоугольного треугольника $CD = AD$, но $AD = AC$, значит, искомая площадь вдвое больше площади равностороннего треугольника ADC со стороной $2|x_0| = 6$.

4. 1:1:1; $h = 12/5$; 8, 8, 32. ***Решение.*** Пусть S_1 и S_2 — площади сечений, V, V_1, V_2 и V_3 — соответственно объемы пирамиды и частей, на которые пирамида разбивается плоскостями сечений. Пирамида и ее сечения симметричны относительно плоскости ASC (рис.4), поэтому сечения — дельтоид $AKLM$ ($AK = AM$,

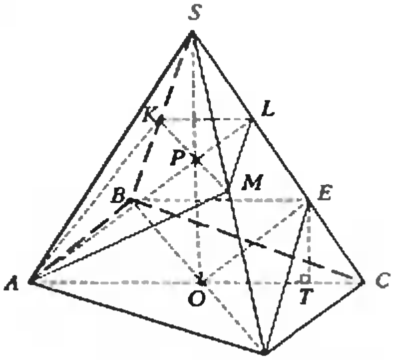


Рис. 4

$LK = LM$), где $AL \perp KM$, и треугольник BED, в котором $OE \perp BD$ (O — центр основания пирамиды). Таким образом, $S_1 = \frac{1}{2}KM \cdot AL$, $S_2 = \frac{1}{2}BD \cdot OE$, и значит, $KM = \frac{1}{2}BD$, так как $AL = 2OE$. Отсюда следует, что $SL = LE$, откуда $SL = LE = EC$, так как $LE = EC$. Это означает, что равны расстояния от точки S до плоскости α_1, между плоскостями α_1 и α_2 сечений, от точки C до плоскости α_2; обозначим это расстояние через h. Отсюда следует, что $V_1 = V_3$, так как $S_1 = S_2$. Но $V_3 = \frac{1}{6}V$, так как площадь треугольника BCD вдвое меньше площади квадрата $ABCD$, а отношение высот ET и SO пирамид $EBCD$ и $SABCD$ равно 1 : 3. Поэтому $V_1 = V_3 = 8$, $V_2 = V - V_1 - V_2 = 32$. Найдем OE. Имеем: $OT : OC = SE : SC = 2:3$, поэтому $OT = 2$, $ET = \frac{1}{3}SO = \frac{8}{3}$, $OE = \frac{10}{3}$. Отсюда $S_2 = 10$ и из равенства $V_3 = \frac{1}{3}hS$ находим h.

5. $-7/10 < p \le 0$, $4/3 \le p < 7/5$, $3/2 \le p < 2$. ***Решение.*** Пусть $y_1 \le y_2$ — корни квадратного уравнения $y^2 - 2By + C = 0$, где $B = 2p(p-1)$, $C = -p^2(2p-3)$. Для того чтобы данное биквадратное уравнение имело решения, необходимо, чтобы дискриминант $D = 4(B^2 - C)$ был неотрицателен. Поскольку $D/4 = p^2(2p-1)(3p-4) \ge 0$, то уравнение имеет корни при $p \le 1/2$, $p \ge 4/3$. Рассмотрим четыре случая. В первых трех $D > 0$.

a) $C < 0$, тогда $y_1 < 0 < y_2$, т.е. уравнение $\left(x - \frac{9}{4}p\right)^2 = y_1$ не имеет корней, а уравнение $\left(x - \frac{9}{4}p\right)^2 = y_2$ имеет два различных корня, сумма S которых, согласно теореме Виета, равна $\frac{9}{2}p$. Из неравенства $S < T$, где $T = -5p^2 + 11p + 7$, следует $-7/10 < p < 2$ и, с учетом условия $C < 0$, получаем $-7/10 < p < 0$, $3/2 < p < 2$.

b) $C = 0$, тогда $p = 0$ или $p = 3/2$. При $p = 0$ уравнение имеет один корень $x = 0$ и неравенство $0 = S < T = 7$ выполнено, а при $p = 3/2$ — три корня с суммой $S = 81/8$, меньшей $T = 49/4$.

c) $C > 0$, тогда числа y_1 и y_2 одного знака, причем оба положительны, если $B > 0$. При этом уравнение имеет четыре корня с суммой $S = 9p$, а из неравенства $S < T$ следует, что $-1 < p < 7/5$, и, с учетом условий $C > 0$, $B > 0$, получаем $4/3 < p < 7/5$.

d) $D = 0$, тогда $y_1 = y_2 = -1/2$ при $p = 1/2$ и уравнение корней не имеет, а при $p = 4/3$ имеем $y_1 = y_2 = 8/9$, тогда $S = 6 < T$.

Вариант 2

1. $\alpha + 2\pi n$, $n \in Z$, где $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$.

2. $25/9 < x < 25/4$, $5/6 < x < 1$.

3. $96/25$. ***Решение.*** Выберем на стороне AC точку P так, что $DP \| AB$ (рис.5), тогда $CP = 5/4$, $DP = 3/4$. Пусть $AK = CK =$

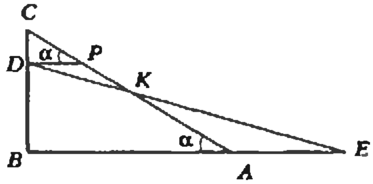


Рис. 5

$= x$, тогда из подобия треугольников DPK и EAK имеем $PK : AK = DP : AE$, т.е. $(x - 5/4) : x = 3/4 : 2$, откуда $x = 2$. Тогда $AC = 4$, $S = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC^2 \sin\alpha\cos\alpha = 96/25$.

4. $LN : LB_2 = 1 : 2$, $a = -1/3$, $b = 1/2$. ***Решение.*** Прямая пересекает параболу ровно в одной точке, если она параллельна ее оси либо касается параболы. Оси парабол параллельны оси Oy (рис.6), поэтому либо $B_1B_2 \| Oy$, либо B_1B_2 — общая касательная к параболам, что невозможно, так как единственная общая касательная данных парабол проходит через точку N. Итак, $B_1B_2 \| Oy$, тогда $NB_2 \| Ox$, поэтому если M — точка пересечения NB_2 с Π_1, то $MN = 2b$, и из симметрии парабол следует $NB_2 = 2b$, откуда $B_2(3b; ab^2)$, $B_1(3b; 9ab^2)$ — координаты точек B_2 и B_1. Тогда касательная B_1L имеет уравнение $y = 6abx - 9ab^2$ и пересекает прямую NB_2 с уравнением $y = ab^2$ в точке $L\left(\frac{5}{3}b; ab^2\right)$. Отсюда получаем, что $NL = \frac{2}{3}b$, $B_2L = \frac{4}{3}b$, т.е.

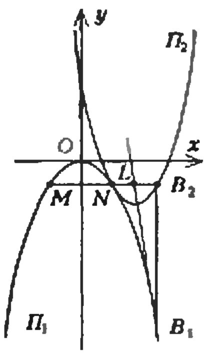


Рис. 6

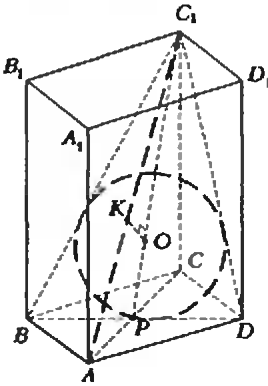


Рис. 7

$NL : B_2L = 1 : 2$. Далее, из равенства $\frac{1}{3} = S_{B_1B_2N} = \frac{1}{2}NB_2 \cdot B_1B_2 = 8|a|b^3$ следует, что $|a| = 1/(24b^3)$. Поэтому $B_1L^2 = B_1B_2^2 + LB_2^2 = 64a^2b^4 + \frac{16}{9}b^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{b^2} + 16b^2\right)$. Наименьшее значение этой функции достигается при $b^2 = 1/4$, т.е. $b = 1/2$ и тогда $a = -1/3$.

Замечание. Искомые значения параметров a и b можно было найти иначе. Из того, что $B_2L = \frac{2}{3}B_2N$, следует, что $S_{B_1B_2L} = \frac{2}{3}S_{B_1B_2N} = \frac{2}{9}$, поэтому B_1L — диагональ прямоугольника LB_2B_1K с площадью $\frac{4}{9}$ и она имеет наименьшую длину, если прямоугольник — квадрат, т.е. $LB_2 = B_2B_1$.

5. $\frac{9\sqrt{14}}{20}\pi$. ***Решение.*** Пусть O — центр окружности основания конуса, P — центр основания призмы (рис.7). Из того, что треугольник BC_1D равнобедренный, следует, что $O \in C_1P$. Радиус

$r = OP$ вписанной окружности находим по формуле $S = rp$, где S — площадь, p — полупериметр треугольника BC_1D. Имеем: $p = 8\sqrt{2}$ и $S = 24$, следовательно, $r = 3/\sqrt{2}$. Далее, плоскость (AC_1C) перпендикулярна плоскости (BC_1D) основания конуса, поэтому она содержит вершину K конуса. Итак, $K \in (AC_1C) \cap (ABC_1)$, т.е. $K \in AC_1$. Высота KO конуса находится из треугольника KOC_1: $\angle KC_1O = \alpha = \beta - \gamma$, где $\operatorname{tg}\beta = AC/C_1C = 6/\sqrt{7}$, $\operatorname{tg}\gamma = PC/C_1C = 3/\sqrt{7}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = 3\sqrt{7}/25$ и $KO = \frac{3\sqrt{7}}{25}(C_1P - r) = \frac{3}{10}\sqrt{14}$. Объем конуса находим по формуле $V = \frac{1}{3}KO \cdot \pi r^2$.

Вариант 3

1. 105. **2.** $x < -1$, $\log_3 2 < x \le \log_3 10 - 1$. **3.** 3. *Решение.* Пусть K — точка касания (рис.8), $\angle NMC = \alpha$, тогда по условию

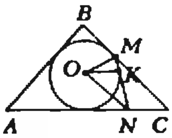


Рис. 8

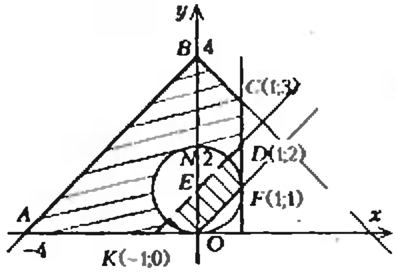


Рис. 9

$\angle MNC = 2\alpha$, $\angle BMK = \pi - \alpha$, $\angle ANK = \pi - 2\alpha$. Но MO и NO — биссектрисы этих углов, поэтому $\angle OMK = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle ONK = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и значит, $OK = OM\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{10}\cos\frac{\alpha}{2}$ и $OK = ON\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{15}{4}\cos\alpha$. Из уравнения $\sqrt{10}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{4}\cos\alpha = \frac{15}{4}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$ находим $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2 \pm 7}{3\sqrt{10}}$, откуда $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, так как $\frac{\alpha}{2}$ — острый угол. Отсюда $r = OK = 3$.

4. См. рис.9; $10 - \frac{\pi}{4}$. *Решение.* При $0 < y - x < 1$ первое неравенство принимает вид $2y - 2xy \ge (y - x)^2$, а при $1 < y - x$ — вид $0 < 2y - 2xy \le (y - x)^2$. Таким образом, первое неравенство задает на плоскости множества

$$M_1: \begin{cases} x < y < x + 1, \\ x^2 + (y - 1)^2 \le 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad M_2: \begin{cases} x + 1 < y, \\ x^2 + (y - 1)^2 \ge 1, \\ y(x - 1) < 0. \end{cases}$$

Второе неравенство задает угол $y \le 4 - |x|$. Фигура Φ изображена на рисунке 9. Для нахождения площади фигуры Φ осталось заметить, что она равна сумме площадей треугольника ABO и трапеции $BCDE$ без площади круга, так как треугольники EFO и OEK равны.

5. $3/8$. *Решение.* Пусть M_1 и M_2 — многогранники, на которые рассекает призму плоскость сечения α, и около M_1 можно описать сферу, а около M_2 — нельзя, S_1 и S_2 — площади их поверхностей. Каждая грань вписанного в сферу многогранника — вписанный в окружность многоугольник, так как сечение сферы плоскостью грани — окружность, содержащая все вершины этой грани. С другой стороны, около прямоугольной трапеции нельзя описать окружность. Поэтому плоскость α пересекает грань AA_1C_1C призмы либо по отрезку KN, $N \in CC_1$ (рис.10), либо по отрезку KN_1, $N_1 \in AA_1$ и, соответственно, треугольник KCN, либо треугольник KAN_1 — грань многогранника M_1 (эта грань не может являться прямоугольником, так как в противном случае $\alpha \perp (ABC)$).

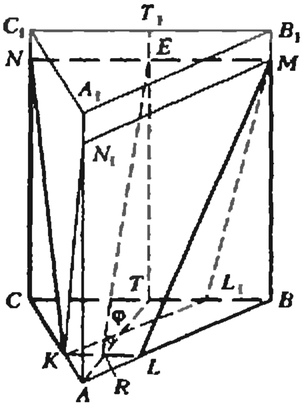


Рис. 10

Если плоскость α не пересекает ребро BB_1, то многогранник M_1 — треугольная пирамида, например, $NKCL_2$, но тогда $S_1 < S_2$. Таким образом, α пересекает ребро BB_1 и M_1 имеет два параллельных ребра, одно из которых лежит на прямой BB_1, другое — на одной из прямых AA_1 либо CC_1. Соответственно, гранью M_1 будет один из прямоугольников AN_1MB либо $CNMB$. Отсюда следует, что α пересекает грань ABC по отрезку KL_2, $KL_2 \parallel AB$, либо по отрезку KL, $KL \parallel BC$. В первом случае

$$S_1 = S_{ABL_2K} + S_{KAN_1} + S_{L_2BM} + S_{ABMN_1} + S_{осн} <$$

$$< \frac{7}{16}S_0 + \frac{1}{8}S_г + S_г + S_{осн} < S_2,$$

где S_0 — площадь основания, $S_г$ — площадь боковой грани призмы. Таким образом, α пересекает призму по трапеции $KLMN$ ($KL \parallel MN$). Пусть T, T_1 — середины ребер BC и B_1C_1, R и E — точки пересечения плоскостью α отрезков AT и MN. По условию $\operatorname{tg}\angle ERT = 7/6$, поэтому $TE = 7\sqrt{3}/16$, значит,

$S_{BCNM} = \frac{7\sqrt{3}}{16}$, $S_{KCN} = S_{LBM} = \frac{21\sqrt{3}}{128}$, $S_{BCKL} = \frac{15\sqrt{3}}{64}$,

и равенство $S_1 = S_2$ можно переписать в виде

$$\frac{15\sqrt{3}}{64} + \frac{21\sqrt{3}}{64} + \frac{7\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\sqrt{3}}{4} + 3AA_1\right).$$

Отсюда $AA_1 = \sqrt{3}/2$ и $V = 3/8$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. На призму со стороны бруска действуют две силы (рис.11): сила нормального давления, равная $N = mg\cos\alpha$, и сила трения скольжения между бруском и призмой, равная $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Со стороны стола на призму действует неизвестная сила трения покоя (F), направление которой выбрано произвольно. Поскольку призма остается в покое, алгебраическая сумма проекций всех действующих на нее сил на горизонтальное направление равна нулю:

$$F + \mu mg\cos^2\alpha - mg\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Отсюда

$$F = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha.$$

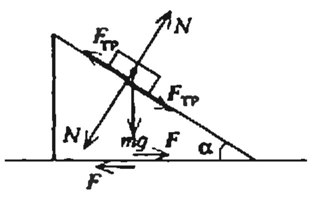


Рис. 11

2. Число молей гелия в первом пузыре равно $\nu_1 = p_0V_0/(RT_1)$, где V_0 — объем пузыря. Во втором пузыре число молей водорода равно соответственно $\nu_2 = p_0V_0/(RT_2)$. После того как пузыри лопнут и в камере установится равновесное состояние, смесь гелия и водорода будет иметь некоторую температуру T и давление p. Температуру смеси можно найти по закону сохранения энергии:

$$\nu_1C_{V_1}(T-T_1)=\nu_2C_{V_2}(T_2-T),$$

откуда

$$T=\frac{\nu_1C_{V_1}T_1+\nu_2C_{V_2}T_2}{\nu_1C_{V_1}+\nu_2C_{V_2}}.$$

Новое установившееся давление смеси будет складываться из давлений гелия и водорода:

$$p=\frac{\nu_1RT}{V}+\frac{\nu_2RT}{V},$$

где V — объем камеры. После подстановки выражений для ν_1, ν_2 и T получим

$$p=p_0\frac{V_0}{V}\frac{\left(C_{V_1}+C_{V_2}\right)(1+T_1/T_2)}{C_{V_1}+C_{V_2}T_1/T_2}=\frac{32}{15}p_0\frac{V_0}{V}.$$

Отсюда

$$\frac{p}{p_0}=\frac{32}{15}\frac{V_0}{V}=\frac{1}{75}.$$

3. До размыкания ключа K установившийся ток через резисторы равен $I=\mathcal{E}/(R_1+R_2)$, а напряжение на конденсаторе равно $U=\mathcal{E}R_2/(R_1+R_2)$. После размыкания ключа конденсатор начнет разряжаться через резистор R_2; и вся энергия электрического поля, запасенная в нем, выделится в виде тепла:

$$Q=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}.$$

4. Обозначим величину напряженности электрического поля, создаваемого пластиной *3*, через E_0, а величину напряженности поля наведенных на пластинах *1* и *2* зарядов — через E_1. Запишем условие эквипотенциальности пластин *1* и *2* до перемещения пластины *3*:

$$(E_0+E_1)a=(E_0-E_1)(d-a),$$

откуда

$$E_1=E_0\left(1-\frac{2a}{d}\right).$$

После перемещения пластины *3* между пластинами *1* и *2* возникает разность потенциалов

$$U_{12}=(E_1-E_0)a+(E_0+E_1)(d-a)=2E_0(d-2a)$$

(здесь была использована связь между E_1 и E_0). Эта разность потенциалов приведет к появлению тока через резистор R:

$$I=\frac{U_{12}}{R}=\frac{q(d-2a)}{\varepsilon_0SR}.$$

Ток будет направлен от пластины *1* к пластине *2*.

После перемещения пластины *3* будет происходить перезарядка пластин *1* и *2* до тех пор, пока они снова не станут эквипотенциальными. Все это время в резисторе будет выделяться тепло. Поскольку начальная (до перемещения) и конечная энергии электрического поля системы равны, суммарное количество теплоты, выделившееся на резисторе, будет равно работе, совершенной при перемещении пластины *3*:

$$Q=qE_1(d-2a)=\frac{q^2d}{2\varepsilon_0S}\left(1-\frac{2a}{d}\right)^2.$$

5. Распространение света от пузырька, прошедшего слой жидкости толщиной $l/2$ и преломленного на плоской границе раздела жидкость — воздух, эквивалентно прямолинейному распространению света от мнимого изображения пузырька, находящегося от границы раздела двух сред на расстоянии $h=l/(2n)$. Здесь и далее речь идет о световых лучах, распространяющихся под малыми углами к главной оптической оси линзы (условие параксиальности лучей). Это изображение находится на расстоянии $L+l/(2n)$ от линзы, а его изображение в линзе получается на экране. Воспользовавшись формулой для тонкой линзы, найдем расстояние x от линзы до экрана:

$$\frac{1}{L+l/(2n)}+\frac{1}{x}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$x=\frac{F\left(L+l/(2n)\right)}{L+l/(2n)-F}=120 \text{ см}.$$

Увеличение линзы равно

$$\Gamma=\frac{x}{L+l/(2n)}=\frac{F}{L+l/(2n)-F}=4.$$

Скорость пузырька равна скорости его мнимого изображения и в искомый момент составляет

$$u=\frac{v}{\Gamma}=\frac{v\left(L+l/(2n)-F\right)}{F}=20 \text{ см/с}.$$

Вариант 2

1. 1) $T=(m_2+m_3)g$; 2) ускорение равно $a=g(m_2+m_3)/m_1$ и направлено вертикально вверх.

2. $T_2/T_1=\sqrt{\alpha}$. 3. 1) $\mathcal{E}=2U_1=12$ В; 2) $U_2=U_1/2=3$ В.

4. 1) $l=2F=40$ см; 2) $v=4\omega F=8$ см/с, $\beta=30°$.

5. $T=\frac{4\pi R}{q}\sqrt{\pi\varepsilon_0mR}$.

Вариант 3

1. $\Delta T=\frac{\beta(1+\alpha)^2T_0}{\alpha\left(1-\beta(1+\alpha)\right)}=100$ К. 2. $r=\sqrt[3]{\left(\frac{RT}{2\pi}\right)^2g}=3{,}8\cdot10^8$ м.

3. 1) $\beta=2\alpha=0{,}16$; 2) изображение получается на расстоянии $F/2=10$ см от линзы и на $H=h/2=1$ см от главной оптической оси. 4. 1) $I_0=(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)/(3R)$; 2) $Q=C_1\mathcal{E}_1^2/2+C_2\mathcal{E}_2^2/2$.

5. 1) Появляется вихревое электрическое поле, которое действует на заряды кольца; 2) $\omega=QB_0/(2m)$.

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-\log_5 6;-1)\cup(0;+\infty)$. 2. 2 км в день и 2,5 км в день.

3. $\pi n, n\in Z$. 4. $\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2(\alpha/2)}{\cos\alpha}$. 5. а) Да; б) нет.

Вариант 2

1. $(-\infty;-3/5)\cup(1;+\infty)$. 2. $x_1=3a-1, x_2=2$ при $a\neq-2;1/4;2/3;1$; $x=-7$ при $a=-2$; $x=2$ при $a=1/4;2/3;1$.

3. $\frac{\pi}{4}+2\pi n, \operatorname{arctg}(3/2)+2\pi n, n\in Z$. 4. $\frac{a^2\sqrt{3}}{48}\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}$. 5. 3;18;108.

ФИЗИКА

1. $t=\sqrt{2\left(v^2-gh\right)}/g=2{,}4$ с. 2. $h=\frac{F(k_1+k_2)}{4k_1k_2}$.

3. $\cos\alpha=\frac{u}{\sqrt{2gh+v_0^2}}=0{,}5$, $\alpha=60°$. 4. $\eta=\frac{A_{23}-A_{14}}{3/2RT_1+A_{23}}=0{,}087$.

5. $T=\frac{T_2V_1+T_1V_2}{V_1+V_2}=333$ К. 6. $\Delta q=qR\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$.

7. $r_2=2r_1=3$ Ом. 8. $I=\frac{CU^2}{BNS}=0{,}5$ А. 9. $d\le 2R/n=5{,}7$ см.

10. $I=\frac{eP\lambda}{hc}=2$ мА.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 50 км/ч и 40 км/ч. 2. 7:17. *Указание.* Одна из фигур — усеченная пирамида (рис. 12).
3. 6 и −2. 4. $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. *Указание.* Рассмотрите два случая: $\cos x>0$ и $\cos x<0$. (Случай $\cos x=0$ невозможен.) 5. 5.

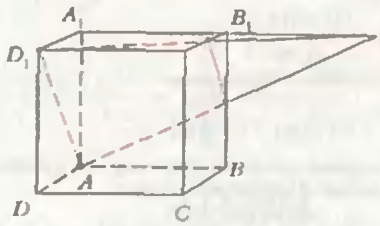


Рис. 12

Вариант 2

1. 4 м/с и 3 м/с. *Указание.* Второе условие означает, что первая точка за 1 минуту проходит путь на 60 м больший, чем вторая: $v_1\cdot 60=v_2\cdot 60+60$.
2. 5/24. *Указание.* Другая часть — пирамида с прямоугольной трапецией в основании и высотой, равной $\sqrt{2}/2$ (рис. 13).

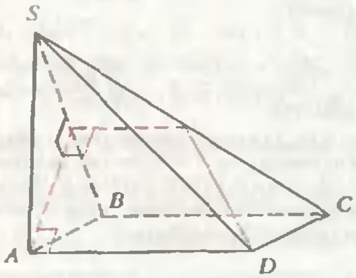


Рис. 13

3. 18,75 и 5. 4. $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ k,n\in Z$. *Указание.* После возведения в квадрат уравнения $\sqrt{1+\sin 2x}=-\cos 2x$ следует учесть, что $\cos 2x\le 0$. 5. 5.

Вариант 3

1. $v=\frac{1}{3}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; $S=l^2\cos\alpha(1+\cos\alpha+\sin\alpha)$.
2. $2x(2x+1)$. *Замечание.* Выражение имеет смысл при $x>1/2$.
3. (3;4). 4. 2/5. 5. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$. *Указание.* Приведите уравнение к виду $(\cos x-2\sin x)^2=0$.

Задачи устного экзамена

1. $\sqrt{0,6}$. 2. $4(3-a)/(3+a)$. *Указание.* Перейдите к логарифмам по основанию 2.

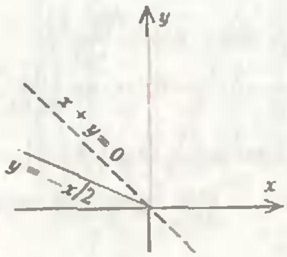


Рис. 14

3. $[-4;5)$. *Указание.* Рассмотрите случаи $x-2<0$ и $x-2\ge 0$.
4. $\left(-2;-\sqrt{3,5}\right)\cup\left(\sqrt{3,5};2\right)$. *Указание.* Приведите неравенство к виду $\log_{x^2-3}1/2>1$ и рассмотрите случаи $0<x^2-3<1$ и $x^2-3>1$.
5. $(-2;-0,5)\cup(0,5;2)$. 6. $2\left(7+\sqrt{15}\right)/3$. 7. −4; 2/5.
8. $(x+1)^2+(y-3)^2=10$. *Указание.* Центр окружности находится в середине гипотенузы.
9. См. рис. 14. *Указание.* Рассмотрите случаи $x+y\ge 0$; $x+y<0$.
10. $[-8;-2)\cup(-2;-1,5)\cup(0;0,5)\cup(0,5;+\infty)$.
11. $(-1;2/3)$ и $(3;-2)$. *Указание.* Две прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны.
12. $m\in(-5;3)$. *Указание.* Если коэффициент $m+5$ при x^2 положителен, то должно быть $y(0)=m-3<0$, а если $m+5<0$, то $m-3>0$ и этого достаточно.

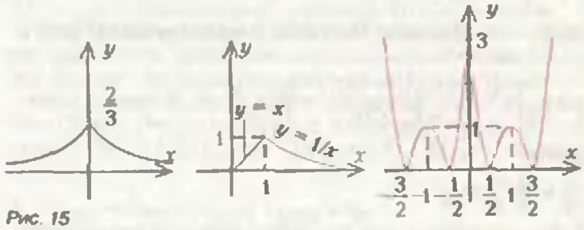


Рис. 15

13—15. См. рис. 15, *а, б, в*.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.П.Бухарев, Д.А.Крымов, С.А.Стулов, Л.А.Тишков

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Л.А.Панюшкина

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Е.В.Самойлова

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области

Заказ № 1701

Восьмой чемпионат мира среди роботов

Если в первенстве мира среди людей в последние годы происходит какая-то неразбериха, то компьютерные чемпионаты уже более двадцати лет проводятся с королевской точностью — раз в три года.

В 1995-м в Гонконге состоялся очередной, восьмой чемпионат мира среди роботов, в котором участвовали 24 машины — супер-ЭВМ и микро-ЭВМ. Впервые в истории чемпионом среди больших и малых машин стала немецкая программа «Фритц», разработанная для PC с микропроцессором «Пентиум» 90 МГц. При этом победила та самая версия программы, «Фритц-3», дискета с которой свободно продается в магазинах. Такой итог чемпионата является настоящей сенсацией. Теперь любители шахмат могут накопить денежки, купить дискету, вставить ее в свой домашний компьютер и с утра до вечера сражаться с самим чемпионом мира! Никогда прежде они и мечтать о таком не могли...

Фаворитом восьмого первенства считалась американская программа «Дип Блу» — улучшенный вариант ее знаменитой предшественницы «Дип Сот», которая несколько лет назад расправилась со многими гроссмейстерами и стала настоящей грозой для шахматистов. В 1989 году в Эдмонтоне «Дип Сот» легко одолела всех своих конкурентов, однако в следующем первенстве мира не участвовала, взяла тайм-аут. Разработчики программы решили пропустить «цикл», чтобы модернизировать свое детище и сделать его вовсе непобедимым. Однако в Гонконге «Дип Блу» несколько разочаровала, она разделила лишь «бронзу». Между прочим, компьютер, для которого написана эта программа, представляет собой гигантскую электронную конструкцию, не предназначенную для перевозок, машина должна находиться в специальном помещении с определенными климатическими условиями. В данном состязании электронных гроссмейстеров связь с американской чемпионкой велась при помощи международной компьютерной сети.

Вместе с этими и другими электронными монстрами, находящимися, как и «Дип блу», далеко-далеко от турнирного помещения, в Гонконге сражалось и много известных программ для PC — кроме «Фритца» еще и «Гениус», «Шах». По неизвестной причине не приехала на турнир программа «Хиаркс», последний чемпион мира среди микрокомпьютеров. А многократный чемпион среди этого класса машин немецкий робот «Мефисто» вообще, кажется, сошел с дистанции, поскольку автор программы англичанин Ричард Лэнг переключился на программу «Гениус», которая теперь представляет Англию.

Первенство мира в Гонконге, как и почти все предыдущие, проходило по швейцарской системе в пять туров. Будущий победитель начал турнир с поражения, однако затем выиграл три партии подряд и в последнем туре ему предстояла решающая встреча с «Дип Блу», потерявшей всего пол-очка. Никто не сомневался в успехе американского робота, но «маленький» PC черными уверенно переиграл своего оппонента-гиганта.

В результате «Фритц» и присоединившаяся к нему английская программа «Стар Сократес» набрали по 4 очка из пяти и разделили 1—2-е места. Для определения чемпиона между ними была назначена дополнительная встреча. Дебютная схватка в ней закончилась в пользу «Фритца». Волнение его автора Франца Морша было столь велико, что он даже покинул турнирное помещение, не дождавшись завершения партии.

Известная своими успехами в борьбе с человеком программа «Гениус» немного подкачала и, хотя и не проиграла ни одной партии, с 3 очками из пяти разделила 6—10-е места.

Конечно, у «Гениуса», который сыграл недавно два матча в быстрые шахматы с самим Гарри Каспаровым — один выиграл 1,5:0,5, а другой с тем же счетом проиграл, были все основания для расстройства. Однако стоит напомнить, что и «Фритцу» есть чем похвастаться в борьбе с белковым чемпионом мира: пару лет назад он не только выиграл у Каспарова партию в блиц, но и поделил с ним 1—2-е места в крупном гроссмейстерском блиц-турнире. Правда, в дополнительном матче «Фритц» не сумел показать все, на что способен, и Каспаров легко взял реванш. Кто знает, может быть, глубокий анализ партий с чемпионом мира и позволил «Фритцу» взойти сейчас на пьедестал...

Но почему все-таки скромный PC сумел расправиться с электронными монстрами, намного превосходящими его и в быстродействии, и в объеме памяти? Как ни странно, именно эти преимущества и подвели супер-ЭВМ. Полагая, что достижения в электронике имеют решающее значение, разработчики программ последнее время мало внимания уделяли модернизации алгоритма игры. Авторы же программ для PC, наоборот, понимая ограниченность технических средств, продолжали усиленно работать над совершенствованием алгоритма. Вот вам и ответ на вопрос.

Надо сказать, что если в первых чемпионатах мира участвовали только супер-ЭВМ, то затем в их составе стало появляться все больше и больше PC, в восьмом чемпионате их уже было примерно две трети. А успех «Фритца» показывает, что в конце концов суперкомпьютеры вообще могут быть вытеснены из шахматных соревнований: пусть занимаются космическими проблемами или чем-нибудь в этом роде...

И в заключение посмотрите партию, решившую исход чемпионата.

«Стар Сократес» — «Фритц»
Испанская партия

1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. Cb5 Kf6 4. 0-0 Cc5 5. K:e5 K:e5 6. d4 a6 7. Ca4 K:e4 8. Фe2 Ce7 9. Ф:e4 Kg6 10. f4 0-0 11. Cb3. В данной позиции раньше встречалось 11. f5 d5 12. Фd3 Kh4 13. g3 c5 с острой игрой. Отступление слоном на b3 с целью помешать черной пешке «d» двинуться на два поля вперед тоже упоминается в дебютных энциклопедиях, но на практике до сих пор не испытывалось. Компьютерная партия показывает, что эта рекомендация не слишком удачна. **11...Cf6 12. Kc3 c6 13. Фd3.** Позволяет черным перехватить инициативу, равенство сохранялось в случае 13. d5 Лe8 14. Фd3 d6. **13...d5 14. Ce3 b6 15. f5 Ke7 16. Лf3.** Все готово для контратаки центра путем c6-c5, и помешать этому невозможно. В случае немедленного 16. g4 Лe8 17. g5 K:f5 18. Л:f5 C:f5 19. Ф:f5 Л:e3 20. gf Ф:f6 21. Ф:f6 gf черные тоже получали весьма активную игру. Белые пытаются усилить позицию, но ладья на f3 попадает под коварный удар... **16... c5! 17. dc d4 18. Лd1.** Возможно, белые рассчитывали на эту связку, чтобы после 18...bc одну за другой отвести обе свои фигуры. Однако промежуточный ход слоном резко меняет обстановку на доске. **18... Cb7!** Освобождение от связки ведет к выигрышу качества или фигуры. **19. C:d4 C:f3 20. gf C:d4+ 21. Ф:d4 Ф:d4+ 22. Л:d4 bc 23. Лf4 Лac8 24. Cc4 Лc6.** У белых пешка за качество, маловато... **25. Ke4 Лb8 26. Kpf2 Kd5 27. Лg4 Kpf8 28. Лh4 Kf6 29. Kpe3 h6 30. b3 Лd1 31. a3 Лa1 32. a4 Лd1 33. Cd3 Kpe7 34. Kpe2 Лg1 35. Лh3 Kd5.** Белые пытаются построить неприступную крепость, но стройматериалов явно недостаточно... «Стар Сократес» сопротивлялся 40 ходов, но не сумел доказать, что он Сократ... На 75-м ходу белые сдались, и «Фритц» был провозглашен новым чемпионом мира.

Е.Гик

Индекс 70465

Уважаемые читатели журнала

КВАНТ

Еще раз обращаем Ваше внимание на то, что

Адрес редакции журнала изменился!

Наш новый адрес:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64а
тел. 930-56-48, 930-56-41

Однако подписку на наш журнал Вы по-прежнему можете оформить в любом отделении связи России и стран СНГ.

Наш индекс 70465 в каталоге Роспечать

Подписная цена на первое полугодие 1996 года осталась без изменений по сравнению с предыдущим годом, т.е. 54000 руб за 3 номера журнала и 3 приложения к ним. Напоминаем Вам также, что в помещении редакции можно приобрести вышедшие номера журнала «Квант» и приложения.

Звоните и приходите!

Мы Вас ждем!

Бюро Квантум